서울대 수학박사들이 만든
인공지능 수학선생님

마타수학

개념기본서

수학(상)

Ⅱ 방정식과 부등식

04 복소수

정의 & 포인트 확인

- 허수단위
- 복소수
- 복소수가 서로 같을 조건
- 켤레복소수
- 실수와 순허수의 켤레복소수
- 무리수가 서로 같을 조건
- 복소수의 덧셈과 뺄셈
- 복소수의 곱셈
- 복소수의 나눗셈
- 음수의 제곱근

- 복소수의 연산에 대한 성질
- 제곱근의 곱셈과 나눗셈
- 켤레복소수의 합과 곱
- 켤레복소수의 연산 법칙
- 허수단위 i의 거듭제곱

04-1 복소수의 뜻과 연산

허수단위

실수의 중요한 성질 중 하나는, 실수를 제곱하면 항상 0 이상의 실수가 된다는 것이다. 이러한 성질로 인해 이차방정식 $x^2=-1$은 실수 범위에서 해를 가지지 않는다. 이러한 방정식이 해를 가지려면 제곱하여 음수가 되는 수가 존재해야 하므로 실수 범위를 넘는 수의 확장이 필요하다.

수의 확장에 있어 가장 기본이 되는, 제곱하여 -1이 되는 수를 생각하고 이를 기호 i로 나타낸다. 즉, $i^2=-1$이다. 이때 i를 허수단위라 한다.

실수의 성질
임의의 실수 a는 $a>0$ 또는 $a=0$ 또는 $a<0$이다. 각각의 경우에 대하여 제곱을 하면 다음과 같이 항상 0 또는 양수임을 알 수 있다.
- $a>0$이면 $a^2>0$이다.
- $a=0$이면 $a^2=0$이다.
- $a<0$이면 $-a>0$이므로 $(-a)^2>0$이다. 이때 $(-a)^2=a^2$이므로 $a^2>0$이다.

정 의 상 4.1 **허수단위**

제곱하여 -1이 되는 수를 **허수단위**라 하고, i로 나타낸다.

허수단위 i
i는 허수를 뜻하는 imaginary number의 첫 글자를 따온 것이다.

복소수의 정의

임의의 두 실수 a, b와 허수단위 i에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수를 복소수라 한다. 이때 a를 이 복소수의 실수부분, b를 이 복소수의 허수부분이라 한다.

정 의 상 4.2 **복소수**

두 실수 a, b와 허수단위 i에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수를 **복소수**라 하고, a를 이 복소수의 **실수부분**, b를 이 복소수의 **허수부분**이라 한다.
또한 복소수 $a+bi$는 다음과 같이 분류할 수 있다.
- **실수** 복소수 $a+bi$에서 $b=0$인 복소수
- **허수** 복소수 $a+bi$에서 $b\neq0$인 복소수
- **순허수** 복소수 $a+bi$에서 $a=0$, $b\neq0$인 복소수

임의의 실수 a는 $a+0\cdot i$의 꼴로 나타낼 수 있으므로 실수는 복소수이다.

예 시
(1) 복소수 $2+0\cdot i=2$는 실수이다.
(2) 두 복소수 $3i$와 $1+i$는 허수이다.
(3) 복소수 $3i$는 순허수이다.
(4) 복소수 $1+i$는 순허수가 아닌 허수이다.

보기 4.1 다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 각각 구하시오.

(1) $2-3i$ (2) $4i$ (3) $-1+\sqrt{5}i$

보기 4.2 다음 수를 실수, 순허수 또는 순허수가 아닌 허수로 구분하시오.

ㄱ. π ㄴ. $1+2i$ ㄷ. i ㄹ. -2

ㅁ. $i-\sqrt{3}$ ㅂ. $\sqrt{5}i$ ㅅ. 0 ㅇ. $1+\sqrt{-1}$

복소수가 서로 같을 조건

두 복소수의 실수부분과 허수부분이 각각 같으면 두 복소수는 서로 같다고 한다. 즉, a, b, c, d가 실수일 때, 두 복소수 $a+bi$, $c+di$에 대하여 $a=c$, $b=d$이면 두 복소수는 서로 같다. 또한 $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다. 특히, $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이고 반대로 $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.

$a+bi=1+i$에서 a, b가 실수가 아니라면 $a=i$, $b=-i$인 경우에도 $a+bi=1+i$가 성립하므로 꼭 $a=1$, $b=1$이라고 말할 수 없다.

포인트 상 4.3 **복소수가 서로 같을 조건**

실수 a, b, c, d에 대하여

- $a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$
- $a+bi=0 \iff a=0,\ b=0$

예시

(1) a, b가 실수일 때 $a+\sqrt{2}i=3+bi$이면 $a=3$, $b=\sqrt{2}$이다.

(2) c, d가 실수일 때 $(c-1)+(d+1)i=0$이면 $c=1$, $d=-1$이다.

보기 4.3 다음 등식을 만족시키는 실수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(1) $a+bi=2-\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}+ai=b+2\sqrt{2}i$

한 걸음 더

무리수가 서로 같을 조건

두 무리수가 서로 같을 조건은 두 복소수가 서로 같을 조건(p.125)과 비슷하다.

포인트 상 4.4 **무리수가 서로 같을 조건**

유리수 a, b, c, d와 무리수 $\sqrt{m}$에 대하여

- $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m} \iff a=c,\ b=d$
- $a+b\sqrt{m}=0 \iff a=0,\ b=0$

보기 정답

4.1 (1) 실수부분: 2, 허수부분: -3
(2) 실수부분: 0, 허수부분: 4
(3) 실수부분: -1, 허수부분: $\sqrt{5}$

4.2 실수: ㄱ, ㄹ, ㅅ
순허수: ㄷ, ㅂ
순허수가 아닌 허수: ㄴ, ㅁ, ㅇ

4.3 (1) $a=2-\sqrt{3}$, $b=0$
(2) $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$

켤레복소수

a, b가 실수일 때 복소수 $a+bi$에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라 하고, 이를 기호로 $\overline{a+bi}$와 같이 나타낸다. 즉, $\overline{a+bi}=a-bi$이다. 반대로 복소수 $a-bi$의 켤레복소수 $\overline{a-bi}$는 $a+bi$이다. 복소수 $z=a+bi$에 대하여 z의 켤레복소수는 $\overline{z}$와 같이 나타내기도 한다.

정 의 상 4.5 **켤레복소수**

- 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 복소수 $a+bi$의 **켤레복소수**라 하고 $\overline{a+bi}$와 같이 나타낸다.
- 복소수 z의 켤레복소수는 $\overline{z}$와 같이 나타낸다.

예 시
(1) $1-i$의 켤레복소수는 $\overline{1-i}=1+i$이다.
(2) $\sqrt{3}i$의 켤레복소수는 $\overline{\sqrt{3}i}=-\sqrt{3}i$이다.

보기 4.4 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $2+3i$ (2) $-3i$ (3) 5 (4) $i-\sqrt{3}$

실수와 순허수의 켤레복소수

실수 a에 대하여 복소수 $z=a$는

$$\overline{z}=\overline{a}=\overline{a+0\cdot i}=a-0\cdot i=a=z$$

를 만족한다. 즉, 복소수 z가 실수이면 $\overline{z}=z$가 성립한다.

한편, 실수 b에 대하여 복소수 $z=bi$는

$$\overline{z}=\overline{bi}=\overline{0+bi}=0-bi=-z$$

를 만족한다. 즉, 복소수 z가 순허수이면 $\overline{z}=-z$가 성립한다. 이와 같이 켤레복소수를 이용하면 복소수가 실수인지 순허수인지 구분할 수 있다.

포인트 상 4.6 **실수와 순허수의 켤레복소수**

- z가 실수이다. $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=z$
- z가 순허수이면 $\overline{z}=-z$이다.

예 시
(1) $z=2$는 실수이므로 $\overline{z}=\overline{2}=2=z$이다.
(2) $z=3i$는 순허수이므로 $\overline{z}=\overline{3i}=-3i=-z$이다.

실수와 순허수의 켤레복소수

- $z=a+bi$에 대하여 $\overline{z}=z$이면 $a-bi=a+bi$이고 복소수가 서로 같을 조건(p.125)에 의하여 $b=0$이다. 따라서 $z=a+0\cdot i=a$는 실수이다.
- $\overline{z}=-z$이면 z는 순허수이거나 $z=0$이다.

보기 정답

4.4 (1) $2-3i$ (2) $3i$ (3) 5
(4) $-i-\sqrt{3}$

보기 4.5 복소수 $z=2a+bi$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 a, b의 조건을 구하시오.

(1) z가 실수이다. (2) z가 순허수이다.

배운 내용을 종합하면 복소수의 체계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

- 복소수 $(a+bi)$
  - 실수 $(b=0)$
    - 유리수
      - 정수
        - 자연수(= 양의 정수)
        - 0
        - 음의 정수
      - 정수가 아닌 유리수
        - 유한소수
        - 순환소수
    - 무리수(= 순환하지 않는 무한소수)
  - 허수 $(b\neq 0)$
    - 순허수 $(a=0, b\neq 0)$
    - 순허수가 아닌 허수 $(a\neq 0, b\neq 0)$

복소수의 덧셈과 뺄셈

복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i를 하나의 문자로 생각하여 **다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)**과 같은 방법으로 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 각각 계산한다. a, b, c, d가 실수일 때, 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$의 덧셈과 뺄셈은 각각 다음과 같다.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

정 의 상 4.7 **복소수의 덧셈과 뺄셈**

a, b, c, d가 실수일 때,

- **복소수의 덧셈** $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- **복소수의 뺄셈** $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

예 시 두 복소수 $3-i$, $1+2i$에 대하여

(1) $(3-i)+(1+2i)=(3+1)+(-1+2)i=4+i$

(2) $(3-i)-(1+2i)=(3-1)+(-1-2)i=2-3i$

보기 4.6 다음을 계산하시오.

(1) $(1+3i)+(2-i)$ (2) $(3+4i)-(-2+i)$

무리수의 덧셈과 뺄셈

무리수의 덧셈과 뺄셈에서는 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

$$\begin{aligned}&(1+2\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})\\&=(1+4)+(2+1)\sqrt{3}\\&=5+3\sqrt{3}\end{aligned}$$

보기 정답

4.5 (1) $b=0$ (2) $a=0$, $b\neq 0$

4.6 (1) $3+2i$ (2) $5+3i$

복소수의 곱셈

복소수의 곱셈은 허수단위 i를 하나의 문자로 생각하여 **다항식의 곱셈**(p.20)과 같은 방법으로 분배법칙을 이용하여 계산한다. 이때, 계산과정에서 $i^2=-1$임을 이용한다. a, b, c, d가 실수일 때, 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$의 곱셈은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &(a+bi)(c+di) \\ &=ac+adi+bci+bdi^2 && \leftarrow \text{분배법칙을 이용하여 전개한다.} \\ &=ac+adi+bci-bd && \leftarrow i^2=-1\text{이다.} \\ &=(ac-bd)+(ad+bc)i && \leftarrow \text{복소수의 덧셈과 뺄셈을 한다.} \end{aligned}$$

정 의 상 4.8 **복소수의 곱셈**

a, b, c, d가 실수일 때,

- **복소수의 곱셈** $(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$

예 시

두 복소수 $3-i$, $1+2i$에 대하여

$$(3-i)(1+2i)=3\cdot1+3\cdot2i-i\cdot1-2i^2=5+5i$$

이다.

보기 4.7 다음을 계산하시오.

(1) $(1+2i)(2-i)$　　(2) $(1-i)(1+i)$

무리수의 곱셈

근호를 포함한 수를 하나의 문자로 생각하여 계산한다.

$$\begin{aligned} &(1+2\sqrt{3})(4+\sqrt{3}) \\ &=(4+6)+(1+8)\sqrt{3} \\ &=10+9\sqrt{3} \end{aligned}$$

복소수의 나눗셈

복소수의 나눗셈은 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화하는 방법과 비슷하다. 즉, 분수 꼴로 나타낸 뒤 분모의 **켤레복소수**(p.126)를 분모와 분자에 곱하여 분모를 실수로 만들어서 계산한다. a, b, c, d가 실수일 때, 복소수 $a+bi$를 복소수 $c+di$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &(a+bi)\div(c+di) \\ &=\frac{a+bi}{c+di} \\ &=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} && \leftarrow \text{분모와 분자에 } \overline{c+di}\text{를 곱한다.} \\ &=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} && \leftarrow \text{분배법칙을 이용하여 전개한다.} \\ &=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i && \leftarrow \text{복소수의 덧셈과 뺄셈을 한다.} \end{aligned}$$

무리수의 나눗셈과 유리화

곱셈공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화한다.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3+\sqrt{5}} &= \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &=\frac{4(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} \\ &=\frac{4(3-\sqrt{5})}{4}=3-\sqrt{5} \end{aligned}$$

보기 정답

4.7 (1) $4+3i$ (2) 2

이때 실수의 나눗셈과 같이 복소수의 나눗셈도 분모가 0이 아닐 때만 생각하므로 $c+di \neq 0$임을 가정한다.

정 의 상 4.9 **복소수의 나눗셈**

a, b, c, d가 실수이고 $c+di \neq 0$일 때,

- **복소수의 나눗셈** $(a+bi) \div (c+di) = \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

예 시

두 복소수 $3-i$, $1+2i$에 대하여

$$(3-i) \div (1+2i) = \frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5} i$$

이다.

보기 4.8 다음을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\dfrac{2}{i}$ (2) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (3) $\dfrac{-1+3i}{1+2i}$

음수의 제곱근

허수단위 i를 이용하여 제곱해서 음수가 되는 수를 찾아보자. 양수 a에 대하여 두 수 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$는

$$\left(\sqrt{a}i\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 i^2 = -a$$
$$\left(-\sqrt{a}i\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 i^2 = -a$$

이므로 방정식 $x^2 = -a$의 두 근이다. 즉, $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$는 $-a$의 제곱근이다. 이때 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$로 나타내기도 한다.

정 의 상 4.10 **음수의 제곱근**

$a > 0$일 때, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$이고 $-a$**의 제곱근**은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

예 시

$\sqrt{-1} = i$이고 -1의 제곱근은 $\pm i$이다.

보기 4.9 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) -2 (2) -9 (3) -12

복소수의 대소 관계

실수는 대소를 비교할 수 있지만 복소수는 대소를 비교할 수 없다. 즉, $i > 0$, $i < 1$과 같은 대소 비교가 불가능하다. 만약 복소수의 대소를 비교할 수 있다면, i와 0의 대소를 비교할 때 다음과 같은 문제가 발생한다.

- $i > 0$이면, $i^2 > i \cdot 0 = 0 \Rightarrow -1 > 0$ (모순)
- $i = 0$이면, $i^2 = i \cdot 0 = 0 \Rightarrow -1 = 0$ (모순)
- $i < 0$이면, $i^2 > i \cdot 0 = 0 \Rightarrow -1 > 0$ (모순)

따라서 허수단위 i와 0의 대소를 비교하는 것은 불가능하다.

$\pm\sqrt{a}i$는 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$를 한꺼번에 표현한 것이다.

보기 정답

4.8 (1) $-2i$ (2) i (3) $1+i$

4.9 (1) $\pm\sqrt{2}i$ (2) $\pm 3i$ (3) $\pm 2\sqrt{3}i$

복소수가 서로 같을 조건

예제 01 다음 물음에 답하시오.

(1) $(2a+b)+(a-b-6)i=0$일 때, 두 실수 a, b를 각각 구하시오.

(2) 복소수 $(a^2-b^2)+(a+b)i$의 실수부분이 8이고 허수부분이 2일 때, 두 실수 a, b를 각각 구하시오.

(3) 두 복소수 $a+bi$, $(2a+b)+(2a+3)i$가 서로 같은 복소수일 때, 두 실수 a, b를 각각 구하시오.

길잡이 두 복소수의 실수부분과 허수부분이 각각 같으면 두 복소수는 서로 같다. 즉, 실수 a, b, c, d에 대하여 다음이 성립한다.

- $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
- $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

풀 이

(1) 복소수 $(2a+b)+(a-b-6)i$의 실수부분은 $2a+b$이고 허수부분은 $a-b-6$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2a+b=0, \quad a-b-6=0$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-4$이다.

(2) 복소수 $(a^2-b^2)+(a+b)i$의 실수부분은 a^2-b^2이고 허수부분이 $a+b$이므로

$$a^2-b^2=8, \quad a+b=2$$

이다. 이때 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$이므로

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{8}{2}=4$$

이다. 따라서

$$a+b=2, \quad a-b=4$$

를 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$이다.

(3) 복소수 $a+bi$의 실수부분은 a, 허수부분은 b이고 복소수 $(2a+b)+(2a+3)i$의 실수부분은 $2a+b$, 허수부분은 $2a+3$이다. 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2a+b, \quad b=2a+3$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$이다.

정답 (1) $a=2$, $b=-4$
(2) $a=3$, $b=-1$
(3) $a=-1$, $b=1$

- 복소수가 서로 같을 조건(p.125)
- 복소수(p.124)
- 인수분해 공식 I(p.81)

돌다리 두드리기

두 복소수 $(2x-1)-yi$, $y+(3x+6)i$가 서로 같을 때, 두 실수 x, y를 각각 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $x=-1$, $y=-3$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x-1=y, \quad -y=3x+6$$

이므로 $x=-1$, $y=-3$이다.

정답 및 풀이 p.507

개념 줄이기

유제 01-1

− 인수분해 공식 I(p.81)

복소수 $(3-a)+(a+b)i$는 순허수이고 허수부분이 5이다. 이때 두 실수 a, b의 값을 각각 구하시오.

복소수 $(3-a)+(a+b)i$가 순허수이므로 실수부분이 0이다. 따라서 $3-a=0$에서 $a=3$이다. 또한 허수부분이 5이므로 $a+b=3+b=5$에서 $b=2$이다.

답 $a=3$, $b=2$

개념 그대로

유제 01-2

두 실수 x, y에 대하여 $(x^2-1)+(y^2-4)i=0$일 때, $x+y$의 최댓값을 구하시오.

복소수 $(x^2-1)+(y^2-4)i=0$의 실수부분은 x^2-1이고 허수부분은 y^2-4이다.
복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-1=0,\ y^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=1,\ y^2=4$$

이므로 $x=\pm1$, $y=\pm2$이다. 이때 $x+y$는 $x=1$, $y=2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

답 3

개념 바꾸기

유제 01-3

− 인수분해 공식 I(p.81)
+ 켤레복소수(p.126)

두 실수 a, b에 대하여 두 복소수 $z_1=a+(a+b)i$, $z_2=b+(a+6)i$가 있다. z_1과 $\overline{z_2}$가 서로 같은 복소수일 때, ab의 값을 구하시오.

복소수 $z_1=a+(a+b)i$의 실수부분은 a, 허수부분은 $a+b$이고, 복소수 $\overline{z_2}=\overline{b+(a+6)i}=b-(a+6)i$의 실수부분은 b이고 허수부분은 $-(a+6)$이므로
복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=b, \quad a+b=-(a+6)$$

이다. 따라서 이 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-2$이므로 구하는 값은 $ab=(-2)\cdot(-2)=4$이다.

답 4

예제 02

다음 식을 계산하시오.

(1) $3+i+i(1-i)$　　(2) $(1+i-3i)^2$

(3) $(2+i)(1+i)+(3-2i)^2$　　(4) $(3+\sqrt{2}i)^2+(3-\sqrt{2}i)$

(5) $\dfrac{5i}{2+i}-\dfrac{5}{2-i}$　　(6) $\dfrac{(1+2i)^2}{(3+i)^2}$

길잡이 a, b, c, d가 실수일 때, 두 복소수 $a+bi$, $c+di$의 사칙연산은 다음과 같다.

- $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
- $(a+bi)\times(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$
- $(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

복소수의 사칙연산은 i를 문자와 같이 연산하고 $i^2=-1$로 고쳐 계산하면 된다.

- 복소수의 나눗셈(p.129)
- 복소수의 곱셈(p.128)
- 복소수의 덧셈과 뺄셈(p.127)
- 허수단위(p.124)

풀 이

(1) $3+i+i(1-i)=3+i+i-i^2=4+2i$

(2) $(1+i-3i)^2=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i$

(3) $(2+i)(1+i)+(3-2i)^2=(2+2i+i+i^2)+(9-12i+4i^2)$
$=(1+3i)+(5-12i)=6-9i$

(4) $(3+\sqrt{2}i)^2+(3-\sqrt{2}i)=9+6\sqrt{2}i+2i^2+3-\sqrt{2}i=10+5\sqrt{2}i$

(5) $\dfrac{5i}{2+i}-\dfrac{5}{2-i}=\dfrac{5i(2-i)-5(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{-5i^2+5i-10}{5}=\dfrac{-5+5i}{5}=-1+i$

(6) $\dfrac{(1+2i)^2}{(3+i)^2}=\dfrac{1+4i+4i^2}{9+6i+i^2}=\dfrac{-3+4i}{8+6i}=\dfrac{-3+4i}{2(4+3i)}$
$=\dfrac{(-3+4i)(4-3i)}{2(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{-12+25i-12i^2}{2(16-9i^2)}=\dfrac{25}{50}i=\dfrac{1}{2}i$

정답 (1) $4+2i$ (2) $-3-4i$ (3) $6-9i$ (4) $10+5\sqrt{2}i$ (5) $-1+i$ (6) $\dfrac{1}{2}i$

돌다리 두드리기

다음을 계산하시오.

(1) $i-5+(2-5i)(-1+2i)$　　(2) $\dfrac{2+i}{1-i}+\dfrac{2-i}{1+i}$

(1) $i-5+(2-5i)(-1+2i)=i-5-2+4i+5i-10i^2=3+10i$

(2) $\dfrac{2+i}{1-i}+\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{(2+i)(1+i)+(2-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=1$

돌다리 두드리기

| 답 | (1) $3+10i$ (2) 1

정답 및 풀이 p.507

개념 그대로

유제 02-1

$(2+i)(3-2i)+\dfrac{(1-i)^2}{2+i}$을 계산하시오.

복소수의 연산법칙에 의하여 주어진 식을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(6-4i+3i-2i^2)+\frac{(1-2i+i^2)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\\&=(8-i)+\frac{-2i(2-i)}{4-i^2}\\&=(8-i)+\frac{-4i+2i^2}{5}\\&=\frac{40-5i-4i-2}{5}=\frac{38}{5}-\frac{9}{5}i\end{aligned}$$

답 $\dfrac{38}{5}-\dfrac{9}{5}i$

개념 바꾸기

유제 02-2

− 복소수의 나눗셈(p.129)
+ 복소수가 서로 같을 조건(p.125)

두 복소수 $z_1=1+2i$, $z_2=3+i$에 대하여 $z_1+z_2=a+bi$, $z_1z_2=c+di$이다. 이때, $ab-cd$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 실수이다.)

두 복소수의 합과 곱을 각각 계산하면

$$z_1+z_2=(1+2i)+(3+i)=(1+3)+(2+1)i=4+3i$$

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(1+2i)(3+i)=3+i+6i+2i^2\\&=3+i+6i-2=1+7i\end{aligned}$$

이므로 $a=4$, $b=3$, $c=1$, $d=7$이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$ab-cd=4\times3-1\times7=12-7=5$$

답 5

개념 더하기

유제 02-3

+ 복소수가 서로 같을 조건(p.125)

두 실수 x, y가 $x+yi=\dfrac{(1-3i)^2}{1+i}-2+3i$를 만족시킬 때, $x-y$의 값을 구하시오.

복소수의 나눗셈을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{(1-3i)^2}{1+i}&=\frac{1-6i+9i^2}{1+i}=\frac{(-8-6i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\&=\frac{-8+8i-6i+6i^2}{1-i^2}=\frac{-14+2i}{2}=-7+i\end{aligned}$$

이다. 따라서 $x+yi=(-7+i)-2+3i=-9+4i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $x=-9$, $y=4$이고, 구하는 값은 $x-y=-13$이다.

답 -13

복소수가 주어질 때의 식의 값

예제 03 두 복소수 $x=2+i$, $y=2-i$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) x^3+y^3　　(2) $y^4-4y^3+6y^2-2y+4$

| 길잡이 |

(1) 두 복소수의 제곱의 합, 세제곱의 합은 두 수의 합과 곱을 이용하여 식을 변형하자.

(2) **다항식의 나눗셈은 차수가 높은 복잡한 다항식의 값도 간단히 계산할 수 있는 강력한 도구이다.**

$x=2+i$일 때, 다항식 $P(x)=x^3-4x^2+6x+3$의 값을 구해보자. $x-2=i$이므로 양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-4x+5=0$이다. 다항식 $P(x)$를 이차식 x^2-4x+5으로 나누었을 때의 몫은 x, 나머지가 $x+3$이므로

$$P(x)=x^3-4x^2+6x+3=(x^2-4x+5)\cdot x+x+3$$

이 성립한다. 이 등식은 항등식이므로 양변에 $x=2+i$를 대입하자. 이때 $x^2-4x+5=0$이므로 구하는 식의 값은

$$P(2+i)=0\cdot(2+i)+(2+i)+3=5+i$$

이다. 즉 $x=2+i$일 때, $P(x)$의 값을 $x+3$의 값으로 간단히 계산할 수 있다.

| 풀 이 |

(1) $x+y$와 xy의 값을 구하면

$$x+y=(2+i)+(2-i)=4,\quad xy=(2+i)(2-i)=4-i^2=5$$

이다. 따라서 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot5\cdot4=4$$

(2) $y=2-i$에서 $y-2=-i$이므로 양변을 제곱하면

$$y^2-4y+4=-1 \quad\Rightarrow\quad y^2-4y+5=0$$

이다. $P(y)=y^4-4y^3+6y^2-2y+4$라 하면 $P(y)$를 y^2-4y+5로 나누었을 때의 몫은 y^2+1이고 나머지는 $2y-1$이므로

$$P(y)=y^4-4y^3+6y^2-2y+4=(y^2-4y+5)\cdot(y^2+1)+2y-1$$

이 성립한다. 이 등식은 항등식이므로 $y=2-i$를 대입하면 $y^2-4y+5=0$이다. 따라서 구하는 식의 값은 다음과 같다.

$$P(2-i)=2(2-i)-1=3-2i$$

| 정답 | (1) 4　(2) $3-2i$

- 켤레복소수(p.126)
- 허수단위(p.124)
- 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)
- 곱셈 공식의 변형 I(p.23)

돌다리 두드리기

$x=1-i$, $y=1+i$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) x^2+y^2　　(2) x^3-2x^2+4x+3

(1) $x+y=2$, $xy=2$이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-4=0$

(2) $x-1=-i$에서 $x^2-2x+2=0$이므로
$x^3-2x^2+4x+3=x(x^2-2x+2)+2x+3$
$=2(1-i)+3=5-2i$

돌다리 두드리기
| 답 | (1) 0　(2) $5-2i$

정답 및 풀이 p.507

개념 바꾸기

유제 03-1

– 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)
+ 인수분해 공식 I(p.81)

$x=-1+2i$, $y=-1-2i$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ (2) x^3+y^3

(1) $x-y$, $x+y$, xy의 값을 각각 구하면

$$x-y=4i,\quad x+y=-2,\quad xy=1-4i^2=5$$

이다. 인수분해 공식을 이용하면 구하는 식의 값은 다음과 같다.

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{(x+y)(x-y)}{xy}=\frac{(-2)\cdot(4i)}{5}=-\frac{8}{5}i$$

(2) 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 식의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=(-2)^3-3\cdot5\cdot(-2)=22\end{aligned}$$

답 (1) $-\frac{8}{5}i$ (2) 22

개념 줄이기

유제 03-2

– 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)

$x=\frac{1+\sqrt{2}i}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{2}i}{2}$일 때, $x^3+x^2y+xy^2+y^3$의 값을 구하시오.

$x+y$와 xy의 값을 각각 구하면

$$x+y=\frac{1+\sqrt{2}i}{2}+\frac{1-\sqrt{2}i}{2}=1,\quad xy=\frac{1+\sqrt{2}i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{2}i}{2}=\frac{3}{4}$$

이다. 이때 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$의 식을 변형하여 $x+y$와 xy의 값을 대입하면 구하는 식의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=x^3+y^3+xy(x+y)\\&=(x+y)^3-3xy(x+y)+xy(x+y)\\&=(x+y)^3-2xy(x+y)\\&=1^3-2\cdot\frac{3}{4}\cdot1=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

개념 줄이기

유제 03-3

– 곱셈 공식의 변형 I(p.23)

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$일 때, $3x^4-3x^3+4x^2-x+3$의 값을 구하시오.

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}i$이고 양변을 제곱하면

$$4x^2-4x+1=-3 \quad\Rightarrow\quad x^2-x+1=0$$

이다. 이때 $P(x)=3x^4-3x^3+4x^2-x+3$으로 놓으면 다항식 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫은 $3x^2+1$이고 나머지는 2이므로

$$P(x)=3x^4-3x^3+4x^2-x+3=(x^2-x+1)(3x^2+1)+2$$

가 성립한다. 이 등식은 항등식이므로 $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$를 대입하면 $x^2-x+1=0$이다.

따라서 구하는 식의 값은 $P\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=2$이다.

답 2

04-2 복소수의 성질

연산에 대한 성질

임의의 두 복소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 결과는 0으로 나누는 경우를 제외하면 복소수이다. 일반적으로 실수에서와 마찬가지로 복소수에서도 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립하고 곱셈에 대한 교환법칙과 결합법칙 및 분배법칙이 성립한다.

실수와 복소수의 공통점과 차이점

- 공통점
  - 두 실수의 사칙연산의 결과는 실수이고, 두 복소수의 사칙연산의 결과는 복소수이다.
  - 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙과 결합법칙 및 분배법칙이 성립한다.
- 차이점
  - 실수는 대소를 비교할 수 있고, 수직선 위에 나타낼 수 있다. 복소수는 대소를 비교할 수 없고, 수직선 위에 나타낼 수 없다.
  - 실수는 음수의 제곱근이 존재하지 않고, 복소수는 음수의 제곱근이 존재한다.
  - 모든 실수 a에 대하여 $a^2 \geq 0$이지만, 모든 복소수 z에 대하여 $z^2 \geq 0$인 것은 아니다.

포인트 상 4.11 **복소수의 연산에 대한 성질**

임의의 세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

- **교환법칙** $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$
- **결합법칙** $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$
- **분배법칙** $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$, $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$

예시

$z_1=1+2i$, $z_2=3+i$에 대하여

$$z_1+z_2=(1+2i)+(3+i)=4+3i, \qquad z_1z_2=(1+2i)(3+i)=1+7i$$
$$z_2+z_1=(3+i)+(1+2i)=4+3i, \qquad z_2z_1=(3+i)(1+2i)=1+7i$$

이므로 $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$이 성립한다.

제곱근의 곱셈과 나눗셈

$a>0$, $b>0$에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$가 성립하므로 양수의 제곱근을 곱하거나 나눌 때 자유롭게 근호를 통합할 수 있다. 그러나 음수의 제곱근이 포함된 근호의 계산에서는 a, b의 부호에 따라 근호를 통합할 때 위 등식이 성립하지 않는 경우가 있다.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 성립하지 않는 경우

$a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}=\sqrt{-a}i$, $\sqrt{b}=\sqrt{-b}i$이므로

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}i\sqrt{-b}i=\sqrt{(-a)(-b)}i^2=-\sqrt{ab}$$

이다. 즉, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$가 성립하지 않는 경우

$a>0$, $b<0$일 때, $\sqrt{b}=\sqrt{-b}i$이므로

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}i}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}\times\frac{1}{i}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}\times\frac{i}{i^2}=-\sqrt{-\frac{a}{b}}i=-\sqrt{\frac{a}{b}}$$

이다. 즉, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.

포인트 상 4.12 **제곱근의 곱셈과 나눗셈**

실수 a, b에 대하여

- $a<0$, $b<0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다. 이외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.
- $a>0$, $b<0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다. 이외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다. (단, $b\neq0$)

예시

(1) $\sqrt{-1}\sqrt{-2}=i\cdot\sqrt{2}i=-\sqrt{2}$이다.

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{i^2}=-\sqrt{2}i$이다.

보기 4.10 다음 식을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}\sqrt{-3}$ (3) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$

(4) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}$ (5) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}$ (6) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$

켤레복소수의 성질

a, b가 실수일 때, 두 복소수 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$에 대하여

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a,\quad z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

이므로 켤레복소수끼리의 합과 곱은 실수이다.

포인트 상 4.13 **켤레복소수의 합과 곱**

a, b가 실수일 때, 복소수 $z=a+bi$와 그 켤레복소수 $\overline{z}=a-bi$의 합과 곱은 실수이다.

- $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$
- $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

보기 정답

4.10 (1) $\sqrt{6}i$ (2) $\sqrt{6}i$ (3) $-\sqrt{6}$ (4) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$ (5) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$ (6) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

예시 복소수 $z=1+2i$에 대하여 $\overline{z}=1-2i$이므로

$$z+\overline{z}=(1+2i)+(1-2i)=2, \quad z\overline{z}=(1+2i)(1-2i)=5$$

이므로 $z+\overline{z}$와 $z\overline{z}$는 모두 실수이다.

보기 4.11 $z=2-\sqrt{3}i$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $z+\overline{z}$ (2) $z\overline{z}$ (3) $z-\overline{z}$

결레복소수의 연산 법칙

$$\begin{aligned}\overline{z_1-z_2}&=\overline{(a+bi)-(c+di)}\\&=\overline{(a-c)+(b-d)i}\\&=(a-c)-(b-d)i\\&=(a-bi)-(c-di)\\&=\overline{z_1}-\overline{z_2}\end{aligned}$$

a, b, c, d가 실수일 때, $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$라 하면

$$\overline{(\overline{z_1})}=\overline{(\overline{a+bi})}=\overline{a-bi}=a+bi=z_1$$

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z_1z_2}&=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{ac-bd+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i=(a-bi)(c-di)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\end{aligned}$$

이 성립한다. 또한 $z_2=c+di\neq0$일 때

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}=\overline{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

이므로 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$가 성립한다.

포인트 **결레복소수의 연산 법칙**

상 4.14

두 복소수 z_1, z_2와 각각의 결레복소수 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$에 대하여

- $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$
- $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

예시 $z_1=3+2i$, $z_2=1-i$일 때, $\overline{z_1}=3-2i$, $\overline{z_2}=1+i$이므로

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(3+2i)+(1-i)}=\overline{4+i}=4-i$

(2) $\overline{z_1}+\overline{z_2}=(3-2i)+(1+i)=4-i$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{(3+2i)(1-i)}=\overline{5-i}=5+i$

(4) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(3-2i)(1+i)=5+i$

와 같다. (1), (2)로부터 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$이고 (3), (4)로부터 $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$임을 알 수 있다.

보기 정답

4.11 (1) 4 (2) 7 (3) $-2\sqrt{3}i$

허수단위 i의 거듭제곱

허수단위 i의 거듭제곱을 차례로 계산하면 다음과 같다.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i, \quad i^6 = i^5 \cdot i = -1, \quad i^7 = i^6 \cdot i = -i, \quad i^8 = i^7 \cdot i = 1, \quad \cdots$$

따라서 허수단위 i를 거듭제곱하면 i, -1, $-i$, 1의 네 값이 차례대로 반복되어 나타나고, 지수가 4의 배수일 때 i의 거듭제곱은 항상 1임을 알 수 있다. 즉, 임의의 자연수 k에 대하여

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$$

이므로 다음이 성립한다.

$$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i, \qquad i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1,$$
$$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i, \qquad i^{4k+4} = i^{4k} \cdot i^4 = 1$$

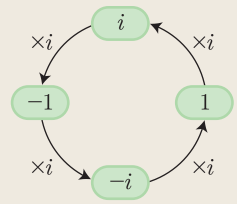


그림 4.1. 허수단위 i의 거듭제곱

포인트 상 4.15 **허수단위 i의 거듭제곱**

허수단위 i의 거듭제곱의 값은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나며
임의의 자연수 k에 대하여 다음과 같은 규칙이 있다.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$
$$i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = i^2 = -1, \quad i^{4k+3} = i^3 = -i, \quad i^{4k+4} = i^4 = 1$$

예시

(1) $i^{12} = (i^4)^3 = 1^3 = 1$ (2) $i^{15} = i^{12} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

(3) $i^9 + i^{15} = (i^4)^2 \cdot i + (-i) = i - i = 0$ (4) $i + \dfrac{1}{i^3} = i + \dfrac{i}{i^4} = i + i = 2i$

보기 4.12 다음을 계산하시오.

(1) $i^3 + i^4 + i^5 + i^6$ (2) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2} + \dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i^4}$

복소수의 순환성

허수단위 i가 아닌 다른 복소수에 대해서도 거듭제곱의 결과가 반복되어 나타날 때가 있다.

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \qquad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$
$$\frac{1-i}{1+i} = -i, \qquad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-2i-1}{2} = -i$$

위의 복소수들은 계산 결과가 i 또는 $-i$이므로 거듭제곱을 할 때마다 특정한 값이 반복되어 나타나는 순환성을 가지게 된다.

보기 정답

4.12 (1) 0 (2) 0

제곱근의 곱셈과 나눗셈 1

예제 04 다음 식을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $(\sqrt{2}-\sqrt{-2})\sqrt{-8}+\sqrt{-2^2}+\sqrt{(-2)^2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}$

길잡이 음수의 제곱근이 포함된 복소수의 사칙연산을 할 때에는

양수 a에 대하여 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

임을 이용하여 **근호 안의 수를 양수로 바꾼 다음 계산하자.** 또한 다음 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 성질도 활용해보자.

- **$a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.** 그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.
- **$a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.** 그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다. (단, $b\neq0$)

- 제곱근의 곱셈과 나눗셈(p.137)
- 음수의 제곱근(p.129)

풀 이

(1) (주어진 식) $=(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)\cdot\sqrt{8}i+\sqrt{-4}+\sqrt{4}$

$=\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}i-\sqrt{2}i\cdot2\sqrt{2}i+4i+2$

$=4i-4i^2+4i+2=6+8i$

[다른 풀이]

(주어진 식) $=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-8}-\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8}+\sqrt{-4}+\sqrt{4}$

$=\sqrt{-16}+\sqrt{16}+4i+2$

$=4i+4+4i+2=6+8i$

(2) (주어진 식) $=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}i}+\dfrac{\sqrt{18}i}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{20}i}{\sqrt{5}i}$

$=\dfrac{3}{i}+3i+2=-3i+3i+2=2$

[다른 풀이]

(주어진 식) $=-\sqrt{3}\sqrt{-3}+\sqrt{-9}+\sqrt{4}$

$=-\sqrt{3}\sqrt{3}i+3i+2=-3i+3i+2=2$

정답 (1) $6+8i$ (2) 2

돌다리 두드리기

다음 식을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-4}+\sqrt{2}\sqrt{-8}+\sqrt{-3^2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{-24}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{-27}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

돌다리 두드리기

|답| (1) $-2\sqrt{2}+7i$ (2) $3-i$

(1) (주어진 식) $=\sqrt{2}i\sqrt{4}i+\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}i+\sqrt{9}i$

$=2\sqrt{2}i^2+4i+3i=-2\sqrt{2}+7i$

(2) (주어진 식) $=\dfrac{2\sqrt{6}i}{\sqrt{6}}+\dfrac{3\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$

$=2i+3-3i=3-i$

정답 및 풀이 p.508

개념 그대로

유제 04-1

다음 식을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{2}\sqrt{-8}+5\sqrt{-3}\sqrt{-27}$

(2) $\dfrac{\sqrt{-125}}{\sqrt{5}}+2\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{-5}}+3\dfrac{\sqrt{-125}}{\sqrt{-5}}$

(1) (주어진 식) $=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}i+5\sqrt{3}i\cdot 3\sqrt{3}i=-45+4i$

(2) (주어진 식) $=\dfrac{5\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}+2\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}i}+3\dfrac{5\sqrt{5}i}{\sqrt{5}i}=5i+\dfrac{10}{i}+15$

$=5i-10i+15=15-5i$

답 (1) $-45+4i$ (2) $15-5i$

개념 더하기

유제 04-2

+ 복소수가 서로 같을 조건(p.125)

실수 a, b에 대하여 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=a+bi$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

(등식 좌변) $=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{8}i+(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$

$=4i^2+1-3i^2+\dfrac{3}{i}=-1+1-3i=-3i$

이다. 따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0$, $b=-3$이므로 $a-b=3$이다.

답 3

개념 그대로

유제 04-3

다음 계산 과정에서 등호가 성립하지 않는 부분을 고르시오.

(1) $4 \overset{㉠}{=} \sqrt{16} \overset{㉡}{=} \sqrt{(-4)(-4)} \overset{㉢}{=} \sqrt{-4}\sqrt{-4} \overset{㉣}{=} (\sqrt{-4})^2 \overset{㉤}{=} -4$

(2) $\sqrt{-3} \overset{㉠}{=} \sqrt{\dfrac{3}{-1}} \overset{㉡}{=} \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-1}} \overset{㉢}{=} \dfrac{\sqrt{3}}{i} \overset{㉣}{=} -\sqrt{3}i \overset{㉤}{=} -\sqrt{-3}$

(1) $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 주어진 계산 과정에서

$\sqrt{(-4)(-4)}=-\sqrt{(-4)}\sqrt{(-4)}$

이다. 따라서 등호가 성립하지 않는 것은 ㉢이다.

(2) $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 주어진 계산 과정에서

$\sqrt{\dfrac{3}{-1}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-1}}$

이다. 따라서 등호가 성립하지 않는 것은 ㉡이다.

답 (1) ㉢ (2) ㉡

제곱근의 곱셈과 나눗셈 2

예제 05 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 다음을 간단히 하시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때, $|a+b|-|b|$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$일 때, $|a-b|+2|a|-3|b|$

(3) $\sqrt{a}\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$일 때, $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

길잡이 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 성질이 성립하는 조건을 명확히 알고 있어야 한다.

- **$a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.** 그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.
- **$a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.** 그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다. (단, $b\neq0$)

풀이

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$이다. 따라서 $|a+b|=-(a+b)$, $|b|=-b$이고 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$|a+b|-|b|=-(a+b)-(-b)=-a-b+b=-a$$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0$, $b<0$이다. 따라서 $|a-b|=a-b$, $|a|=a$, $|b|=-b$이고 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$|a-b|+2|a|-3|b|=a-b+2a-3(-b)=3a+2b$$

(3) $\sqrt{a}\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$인 경우는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때이다. 즉 $a<0$, $b<0$이고

(i) $-a>0$, $b<0$이므로 $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{-a}{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$

(ii) $a<0$, $-b>0$이므로 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\sqrt{\dfrac{a}{-b}}=\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$

이다. 따라서

$$(\text{주어진 식})=-\sqrt{-\frac{a}{b}}+\sqrt{-\frac{a}{b}}=0$$

정답 (1) $-a$ (2) $3a+2b$ (3) 0

• 제곱근의 곱셈과 나눗셈(p.137)

돌다리 두드리기

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 다음을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때, $|a|+2|b|$ (2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$일 때, $|b-a|+3|b|$

돌다리 두드리기

|답| (1) $-a-2b$ (2) $a-4b$

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$이므로
$|a|+2|b|=-a-2b$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0$, $b<0$이므로 $b-a<0$이다. 따라서
$|b-a|+3|b|=-(b-a)-3b=a-4b$

정답 및 풀이 p.508

개념 그대로

유제 05-1

0이 아닌 네 실수 a, b, c, d에 대하여

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}=-\sqrt{\frac{c}{d}}$$

일 때, $|a+d|+2|c-b|$를 간단히 하시오.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$이고, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}=-\sqrt{\frac{c}{d}}$에서 $c>0$, $d<0$이다.

따라서

$$|a+d|=-(a+d),\quad |c-b|=c-b$$

이므로 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$(\text{주어진 식})=-(a+d)+2(c-b)=-a-2b+2c-d$$

답 $-a-2b+2c-d$

개념 그대로

유제 05-2

실수 a에 대하여 $\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a+1}}=-\sqrt{\frac{a+3}{a+1}}$일 때, $\sqrt{(a+4)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$을 간단히 하시오.

$\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a+1}}=-\sqrt{\frac{a+3}{a+1}}$이므로 $a+3>0$이고 $a+1<0$이다.

(i) $a+3>0$이므로 $a+4>0$이고

$$\sqrt{(a+4)^2}=a+4$$

(ii) $a+1<0$이므로 $a-1<0$이고

$$\sqrt{(a-1)^2}=-(a-1)=-a+1$$

이다. (i), (ii)를 이용하여 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$(\text{주어진 식})=a+4-a+1=5$$

답 5

개념 그대로

유제 05-3

두 실수 x, y에 대하여 $x>0>y$일 때, $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{y-x}}+\frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{-x}}+\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{1-y}}$을 간단히 하시오.

문제의 조건에서 $x-y>0$, $y-x<0$, $y-1<0$, $1-y>0$이므로 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=-\sqrt{\frac{x-y}{y-x}}-\sqrt{\frac{4x}{-x}}+\sqrt{\frac{y-1}{1-y}}\\&=-\sqrt{-1}-\sqrt{-4}+\sqrt{-1}\\&=-i-2i+i=-2i\end{aligned}$$

답 $-2i$

결레복소수를 이용한 식의 값

예제 06 두 복소수 α, β에 대하여 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=3+2i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

길잡이

- 복잡한 식의 값을 계산할 때에는 항상 인수분해가 가능한지 먼저 판단해보자.
- 복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$가 함께 있는 식의 연산은 켤레복소수의 연산 법칙을 이용하면 계산이 간단해진다.

주어진 식을 공통인수로 묶어서 인수분해한다. 이후 복소수 z_1, z_2의 각각의 켤레복소수 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$에 대하여 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$가 성립함을 이용한다.

풀 이

1단계 켤레복소수의 연산 법칙을 이용하여 식을 정리한다.

켤레복소수의 연산 법칙에 의하여 주어진 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}&=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)\\&=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\alpha+\beta)\\&=(\overline{\alpha+\beta})(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

1 • 켤레복소수의 연산 법칙(p.138)
• 복소수의 연산에 대한 성질(p.136)

2단계 복소수의 연산과 켤레복소수의 정의를 이용하여 $\alpha+\beta$의 값과 $\overline{\alpha+\beta}$의 값을 구한다.

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$이고, $\overline{\alpha+\beta}$의 켤레복소수는 $\alpha+\beta$이므로

$$\overline{\alpha+\beta}=3+2i$$
$$\alpha+\beta=3-2i$$

2 • 켤레복소수(p.126)

3단계 2단계에서 얻은 값을 1단계에서 얻은 식에 대입하여 값을 구한다.

따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})=(3-2i)(3+2i)=3^2-(2i)^2=13$$

3 • 복소수의 곱셈(p.128)

정답 | 13

돌다리 두드리기

두 복소수 $\alpha=1-i$, $\beta=3-4i$에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}&=(1-i)(1+i)+(3-4i)(3+4i)\\&=1-i^2+9-16i^2=27\end{aligned}$$

돌다리 두드리기
| 답 | 27

정답 및 풀이 p.509

개념 그대로

유제 06-1

두 복소수 α, β에 대하여 $\overline{\alpha-\beta}=3-i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

켤레복소수의 연산 법칙에 의하여 주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}&=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\\&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

이다. 이때 $\overline{\alpha-\beta}=3-i$에서 $\alpha-\beta=\overline{(\overline{\alpha-\beta})}=\overline{3-i}=3+i$ 이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})=(3+i)(3-i)=9-i^2=10$$

답 10

개념 줄이기

유제 06-2

– 복소수의 연산에 대한 성질(p.136)

$z=2-3i$일 때, $(\overline{z})^2+\overline{(\overline{z})}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이다.)

켤레복소수의 연산 법칙에 의하여 $\overline{(\overline{z})}=z$이고 $(\overline{z})^2=\overline{z}\cdot\overline{z}=\overline{z\cdot z}=\overline{z^2}$이다. 따라서

$$z^2=(2-3i)^2=4-12i+9i^2=-5-12i$$

$$(\overline{z})^2=\overline{z^2}=\overline{-5-12i}=-5+12i$$

이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\overline{z}^2+\overline{(\overline{z})}^2=\overline{z}^2+z^2=-5+12i-5-12i=-10$$

답 -10

개념 그대로

유제 06-3

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}=4$, $\alpha\beta=2$일 때, $\dfrac{\overline{\beta}}{\alpha}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\beta}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

주어진 식을 정리하면 $\dfrac{\overline{\beta}}{\alpha}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\beta}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}}{\alpha\beta}$이다. $\alpha\beta$, $\alpha\overline{\alpha}$의 값은 주어져 있으므로, $\beta\overline{\beta}$의 값을 구해야 한다. $\alpha\beta=2$에서 $\overline{\alpha\beta}=2$이므로

$$(\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta})=\alpha\beta\overline{\alpha\beta}=4$$

이고 $\alpha\overline{\alpha}=4$이므로 $\beta\overline{\beta}=1$이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}}{\alpha\beta}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\dfrac{5}{2}$

허수단위의 거듭제곱

예제 07

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{2018}$ (2) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{20}$

길잡이 허수단위 i의 거듭제곱은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나고 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i,\quad i^{4k+4}=1$$

가 성립한다. 특히 $i^4=1$임을 이용하여 식을 간단하게 할 수 있다.

풀 이

(1) 허수단위 i의 거듭제곱을 계산해보면

$$i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1$$

이므로 $i+i^2+i^3+i^4=0$이 성립한다. 이것과 $i^4=1$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)\\&\quad+\cdots+(i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016})+i^{2017}+i^{2018}\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)\\&\quad+\cdots+i^{2012}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{2016}(i+i^2)\\&=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{504\text{개}}+i+i^2=-1+i\end{aligned}$$

(2) 괄호 안의 식을 간단히 하면

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$$

이므로 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}=i^{20}=(i^4)^5=1$$

정답 (1) $-1+i$ (2) 1

• 허수단위 i의 거듭제곱(p.139)
• 복소수의 나눗셈(p.129)

돌다리 두드리기

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$ (2) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{50}$

(1) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)$
$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{25\text{개}}=0$

(2) $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i-1}{1+1}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로
$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{50}=i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=-1$

돌다리 두드리기
|답| (1) 0 (2) -1

개념 그대로

유제 07-1

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{1}{i^{100}}$ (2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{40}$

(1) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1=0$이므로 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$(\text{주어진 식})=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{i^{96}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$$
$$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{25\text{개}}=0$$

(2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=i$이므로 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{40}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{20}=i^{20}=(i^4)^5=1$$

답 (1) 0 (2) 1

개념 그대로

유제 07-2

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+100i^{100}$을 간단히 하시오.

$i^4=1$을 이용하여 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$(\text{주어진 식})$$
$$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)$$
$$+\cdots+(97i^{97}+98i^{98}+99i^{99}+100i^{100})$$
$$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$$
$$+\cdots+(97i-98-99i+100)$$
$$=\underbrace{(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{25\text{개}}=25(2-2i)=50-50i$$

답 $50-50i$

개념 그대로

유제 07-3

$z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$일 때, $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{200}$을 간단히 하시오.

복소수 z를 제곱하면

$$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i-1}{2}=-i$$

이므로 $z^4=(-i)^2=-1$, $z^8=(-1)^2=1$이다. 이를 이용하여 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{200}$$
$$=1+(z+z^2+z^3+z^4)+(z^5+z^6+z^7+z^8)+(z^9+z^{10}+z^{11}+z^{12})$$
$$+(z^{13}+z^{14}+z^{15}+z^{16})+\cdots+(z^{193}+z^{194}+z^{195}+z^{196})$$
$$+(z^{197}+z^{198}+z^{199}+z^{200})$$
$$=1+(z+z^2+z^3+z^4)+(-z-z^2-z^3-z^4)+(z+z^2+z^3+z^4)$$
$$+(-z-z^2-z^3-z^4)+\cdots+(z+z^2+z^3+z^4)+(-z-z^2-z^3-z^4)$$
$$=1+\underbrace{0+0+\cdots+0}_{25\text{개}}=1$$

답 1

04-1 복소수의 뜻과 연산 [1-7]

복소수 $(x^2-4x+3)+(2x-2)i$가 순허수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하시오.

주어진 복소수가 **순허수(p.124)**가 되려면 **허수부분(p.124)**이 0이 아니면서 **실수부분(p.124)**이 0이어야 한다. 즉,

$$x^2-4x+3=0,\quad 2x-2\neq 0$$

을 만족해야 한다. $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=1$인데, $2x-2=2(x-1)\neq 0$에서 $x\neq 1$이어야 한다. 따라서 x의 값이 될 수 있는 것은 3뿐이다.

답 3

04-2

두 실수 x, y가 등식

$$(x^2-x-2)+(y^2+2y-3)i=0$$

을 만족시킬 때, xy의 최댓값을 구하시오.

복소수가 서로 같을 조건(p.125)에 의하여 주어진 복소수의 **실수부분(p.124)**과 **허수부분(p.124)**은 각각 0이다.

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

이고

$$y^2+2y-3=(y-1)(y+3)=0 \quad\Rightarrow\quad y=1 \text{ 또는 } y=-3$$

이다. 따라서 xy의 최댓값은 $x=-1$, $y=-3$일 때 3이다.

답 3

04-3

다음 등식을 만족시키는 양수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(1) $(a+1)i+b-2=3+2i$

(2) $(a^2-4)+(2+a-b)i=3i$

(1) **복소수가 서로 같을 조건(p.125)**에 의하여 **실수부분(p.124)**과 **허수부분(p.124)**을 비교했을 때,

$$a+1=2,\quad b-2=3$$

을 만족해야 하므로 $a=1$, $b=5$이다.

(2) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 실수부분과 허수부분을 비교하면

$$a^2-4=0,\quad 2+a-b=3$$

을 만족해야 한다. $a^2=4$에서 $a=2$ 또는 $a=-2$인데, a는 양수이므로 $a=2$이다. 따라서 $2+a-b=3$에 $a=2$를 대입하면 $b=1$이다.

답 (1) $a=1$, $b=5$ (2) $a=2$, $b=1$

04-4

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(3-\sqrt{5}i)(3+\sqrt{5}i)$

(2) $(5-2i)^2-(2-10i)$

(3) $(4i-\sqrt{5})(2\sqrt{5}+i)$

(4) $\dfrac{1-3i}{3+i}-\dfrac{2+i}{1-i}$

(1) **곱셈 공식(p.22)**을 이용하면 $(3-\sqrt{5}i)(3+\sqrt{5}i)=9-5i^2=14$

(2) **복소수의 곱셈(p.128)**을 이용하여 전개하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}(5-2i)^2-(2-10i)&=(25-20i+4i^2)-(2-10i)\\&=21-20i-2+10i=19-10i\end{aligned}$$

(3) **복소수의 곱셈(p.128)**을 이용하여 전개하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(4i-\sqrt{5})(2\sqrt{5}+i)=(-4-10)+(8\sqrt{5}-\sqrt{5})i=-14+7\sqrt{5}i$$

(4) **복소수의 나눗셈(p.129)**을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1-3i}{3+i}-\frac{2+i}{1-i}=\frac{(1-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}-\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-10i}{10}-\frac{1+3i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

답 (1) 14 (2) $19-10i$ (3) $-14+7\sqrt{5}i$ (4) $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

04-5

$(1+i)\overline{z}=5-i$를 만족시키는 복소수 z의 값을 구하시오.

(단, $\overline{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이다.)

$(1+i)\overline{z}=5-i$에서 **복소수의 나눗셈(p.129)**에 의하여

$$\overline{z}=\frac{5-i}{1+i}=\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-6i}{2}=2-3i$$

이다. 따라서 $z=2+3i$이다.

답 $2+3i$

04-6

복소수 $(4+xi)(2-3i)$를 제곱하면 음의 실수가 될 때, 실수 x의 값을 구하시오.

제곱하면 음이 실수가 되는 복소수는 **순허수(p.124)**이다. **복소수의 곱셈(p.128)**을 이용하여 전개하면

$$(4+xi)(2-3i)=(3x+8)+(2x-12)i$$

이므로

$$3x+8=0,\quad 2x-12\neq 0$$

을 만족해야 한다. 즉, $x=-\frac{8}{3}$, $x\neq 6$이므로 $x=-\frac{8}{3}$이다.

답 $-\frac{8}{3}$

04-7

$x=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$, $y=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$일 때, $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$의 값을 구하시오.

$$x+y=\frac{3+\sqrt{7}i}{2}+\frac{3-\sqrt{7}i}{2}=3$$
$$xy=\frac{3+\sqrt{7}i}{2}\times\frac{3-\sqrt{7}i}{2}=4$$

이므로 **곱셈 공식의 변형(p.23)**을 이용하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$$
$$=\frac{3^3-3\cdot4\cdot3}{4}=-\frac{9}{4}$$

답 $-\dfrac{9}{4}$

04-8 복소수의 성질 [8-12]

다음 식을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{-3}\sqrt{-6}}+\sqrt{3}\sqrt{-6}$ (2) $\dfrac{\sqrt{-8}\sqrt{-4}}{\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-25}}$

제곱근의 곱셈과 나눗셈(p.137)을 이용하면 다음과 같다.

(1) $$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{-3}\sqrt{-6}}+\sqrt{3}\sqrt{-6}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}i\cdot\sqrt{6}i}+\sqrt{3}\sqrt{6}i$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{i^2}+3\sqrt{2}i=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$$

(2) $$\frac{\sqrt{-8}\sqrt{-4}}{\sqrt{18}}-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-25}}=\frac{\sqrt{8}i\cdot\sqrt{4}i}{\sqrt{18}}-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{25}i}$$
$$=\frac{4}{3}i^2-\frac{2\sqrt{3}i}{5i^2}=-\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{5}i$$

답 (1) $-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ (2) $-\dfrac{4}{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{5}i$

04-9

두 복소수 $z_1=\dfrac{-4+i}{3-2i}$, $z_2=\dfrac{-5\sqrt{2}+10i}{\sqrt{-2}}$에 대하여 $13z_1+z_2$의 값을 구하시오.

복소수의 나눗셈(p.129)을 이용하면

$$z_1=\frac{-4+i}{3-2i}=\frac{(-4+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-12-8i+3i+2i^2}{3^2-(2i)^2}$$
$$=\frac{-12-8i+3i-2}{9+4}=\frac{-14-5i}{13}$$

이다. 따라서

$$13z_1=13\times\frac{-14-5i}{13}=-14-5i$$

이다. 한편, **음수의 제곱근(p.129)**으로부터 $a>0$일 때 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ $(i=\sqrt{-1})$에서 $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$이므로

$$z_2=\frac{-5\sqrt{2}+10i}{\sqrt{-2}}=\frac{-5\sqrt{2}+10i}{\sqrt{2}i}=\frac{-5\sqrt{2}i+10i^2}{\sqrt{2}i^2}$$
$$=\frac{-5\sqrt{2}i-10}{-\sqrt{2}}=5\sqrt{2}+5i$$

이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$13z_1+z_2=(-14-5i)+(5\sqrt{2}+5i)=5\sqrt{2}-14$$

답 $5\sqrt{2}-14$

04-10

두 복소수 α, β가 $\overline{\alpha}+\beta=i$, $\overline{\alpha}\beta=-1$을 만족시킬 때, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

$\overline{\alpha}\beta=-1$이므로 **켤레복소수의 연산 법칙(p.138)**에 의하여

$$\alpha\overline{\beta}=\overline{(\overline{\alpha}\beta)}=\overline{(-1)}=-1$$

이고 $\overline{\alpha}+\beta=i$이므로

$$\alpha+\overline{\beta}=\overline{\overline{\alpha}+\beta}=\overline{i}=-i$$

이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\overline{\beta}}=\frac{\overline{\beta}+\alpha}{\alpha\overline{\beta}}=\frac{-i}{-1}=i$$

답 i

04-11

다음 식을 간단히하시오.

(1) $(1+i)^{13}$ (2) $\left(\dfrac{1-i}{i}\right)^{20}$

(1) $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로 주어진 식을 **허수단위 i의 거듭제곱(p.139)**을 이용하여 간단히 하면 다음과 같다.

$$(1+i)^{13}=(1+i)^{12}\cdot(1+i)=(2i)^6\cdot(1+i)$$
$$=64i^6\cdot(1+i)=64i^2(1+i)=-64-64i$$

(2) $\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{i-i^2}{i^2}=-1-i$이고 $(-1-i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로 주어진 식을 **허수단위 i의 거듭제곱(p.139)**을 이용하여 간단히 하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1-i}{i}\right)^{20}=(-1-i)^{20}=(2i)^{10}=1024i^2=-1024$$

답 (1) $-64-64i$ (2) -1024

04-12

실수 x, y에 대하여

$$i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots+19i^{19}-20i^{20}=x+yi$$

일 때, x, y의 값을 각각 구하시오.

짝수 번째 항들과 홀수 번째 항들끼리 묶어준 뒤 **허수단위 i의 거듭제곱(p.139)**을 이용하면

$$i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdot+19i^{19}-20i^{20}$$
$$=(i+3i^3+5i^5+\cdots+19i^{19})-(2i^2+4i^4+6i^6+\cdots+20i^{20})$$
$$=(i-3i+5i-7i+\cdots-19i)-(-2+4-6+8+\cdots+20)$$
$$=(\underbrace{1-3}_{-2}+\underbrace{5-7}_{-2}+\underbrace{\cdots-19}_{\cdots})i-(\underbrace{-2+4}_{2}\underbrace{-6+8}_{2}+\underbrace{\cdots+20}_{\cdots})$$
$$=(-2-2-2-2-2)i-(2+2+2+2+2)$$
$$=-10i-10$$

에서 $-10-10i=x+yi$이므로 **복소수가 서로 같을 조건(p.125)**에 의하여 $x=-10$, $y=-10$이다.

답 $x=-10$, $y=-10$

04-1

두 실수 x, y가 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{2}{3-i}$를 만족시킬 때, $\dfrac{x}{y}$의 값을 구하시오.

$\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}$를 **복소수의 나눗셈(p.129)**을 이용하여 $a+bi$ (단, a, b는 실수)의 형태로 바꾸면

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}&=\frac{x(1-2i)+y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}\\&=\frac{x+y-2(x-y)i}{5}\\&=\frac{x+y}{5}+\left\{\frac{2(y-x)}{5}\right\}i\end{aligned}$$

이고 $\dfrac{2}{3-i}$를 $a+bi$ (단, a, b는 실수)의 꼴로 바꾸면

$$\frac{2}{3-i}=\frac{2(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+i}{5}$$

이다. 이때 **복소수가 서로 같을 조건(p.125)**을 이용하면

$$\frac{x+y}{5}=\frac{3}{5},\quad \frac{2(y-x)}{5}=\frac{1}{5}$$

이므로

$$x+y=3,\quad x-y=-\frac{1}{2}$$

이고, 위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{5}{4},\quad y=\frac{7}{4}$$

이므로 구하는 값은 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{7}$이다.

답 $\dfrac{5}{7}$

04-2

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha^2=2i$, $\beta^2=8i$일 때, $\overline{\alpha\beta}$의 값을 구하시오.

$\alpha^2=2i$, $\beta^2=8i$에서 $\overline{\alpha^2}=-2i$, $\overline{\beta^2}=-8i$이므로 **켤레복소수의 연산 법칙(p.138)**에 의하여

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha\beta})^2&=\overline{\alpha\beta}\cdot\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha\beta\alpha\beta}\\&=\overline{\alpha^2\beta^2}=\overline{\alpha^2}\cdot\overline{\beta^2}=16i^2=-16\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\alpha\beta}=\pm4i$이다.

답 $\pm4i$

04-3

복소수 z에 대하여 $z^2=\dfrac{2}{1-i}$일 때, $z^5+z^4-2z^3-2z^2+2z+8$의 값을 구하시오.

$z^2=\dfrac{2}{1-i}$에서 분모 $1-i$의 **켤레복소수(p.126)** $1+i$를 분모, 분자에 각각 곱하여 정리하면

$$z^2=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{1^2-i^2}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$$

이므로 $z^2-1=i$이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(z^2-1)^2=i^2 \quad\Rightarrow\quad z^4-2z^2+2=0 \qquad\cdots ㉠$$

이다. 이때 $z^5+z^4-2z^3-2z^2+2z+8$을 z^4-2z^2+2로 나누었을 때의 몫은 $z+1$이고 나머지는 6이므로 **다항식의 나눗셈(p.39)**에 의하여

$$z^5+z^4-2z^3-2z^2+2z+8=(z^4-2z^2+2)(z+1)+6$$

이고 이 식에 $z^2=\dfrac{2}{1-i}$를 대입하면 ㉠에 의하여 구하는 값은 6이다.

답 6

04-4

복소수 $z=\dfrac{(1-i)^n}{i}$이 양의 실수가 되도록 하는 최소의 자연수 n의 값과 그 때의 z의 값을 각각 구하시오.

$z=\dfrac{(1-i)^n}{i}=\dfrac{i(1-i)^n}{i^2}=-i(1-i)^n$ 이다. 한편, $1-i$의 **거듭제곱(p.139)**을 차례대로 구하면

$$\begin{aligned}&(1-i)^1=1-i\\&(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i\\&(1-i)^3=(-2i)(1-i)=-2-2i\\&(1-i)^4=(-2-2i)(1-i)=-4\end{aligned}$$

이고, $(1-i)^4=-4$임을 이용하면

$$\begin{aligned}&(1-i)^5=(1-i)^4(1-i)=(-4)(1-i)=-4+4i\\&(1-i)^6=(1-i)^4(1-i)^2=(-4)(-2i)=8i\end{aligned}$$

를 얻는다. $-i$와의 곱이 양의 실수가 되도록 하는 복소수는 **허수부분(p.124)**이 양수인 **순허수(p.124)**이므로 z가 양의 실수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 6이고 그 때의 z의 값은 $z=(-i)\cdot8i=8$이다.

답 $n=6$, $z=8$

04-5

복소수 $z_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$에 대하여

$$z_1=4,\quad z_2=1+\sqrt{3}i,\quad {z_{n+1}}^2=z_{n+2}z_n$$

이 성립할 때, $z_{18}=kz_{12}$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오. (단, 모든 자연수 n에 대하여 $z_n\neq0$이다.)

${z_{n+1}}^2=z_{n+2}z_n$에서 양변을 z_nz_{n+1}로 나누면

$$\frac{z_{n+2}}{z_{n+1}}=\frac{z_{n+1}}{z_n}$$

이므로 $\frac{z_{n+2}}{z_{n+1}}=\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{z_n}{z_{n-1}}=\cdots=\frac{z_2}{z_1}$이다. 따라서

$$z_{18}=\frac{z_2}{z_1}\cdot z_{17}=\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\cdot z_{16}=\cdots=\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^6\cdot z_{12}$$

이다. 이때 **곱셈 공식(p.22)**에 의하여 **복소수(p.124)** ${z_n}^3$의 값을 계산하면

$${z_2}^3=1+3\sqrt{3}i+9i^2+3\sqrt{3}i=-8$$

이므로

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^6=\frac{{z_2}^6}{{z_1}^6}=\frac{(-8)^2}{4^6}=\frac{64}{4^6}=\frac{1}{64}$$

이다. 따라서 $z_{18}=\frac{z_{12}}{64}$이므로 구하는 값은 $k=\frac{1}{64}$이다.

답 $\frac{1}{64}$

04-6

복소수 $z=a-i$에 대하여 $\frac{z}{\overline{z}}$가 실수일 때,

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{100}$$

의 값을 구하시오. (단, a는 실수이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

z의 **켤레복소수(p.126)**는 $\overline{z}=a+i$이므로 **복소수의 나눗셈(p.129)**에 의하여

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{a-i}{a+i}=\frac{(a-i)^2}{(a+i)(a-i)}=\frac{a^2-1-2ai}{a^2+1}$$

이고, $\frac{z}{\overline{z}}$가 실수이므로 $a=0$이다. 즉 $z=-i$이므로 z를 **거듭제곱(p.139)**하면

$$z^2=(-i)^2=i^2=-1,$$
$$z^3=(-1)\cdot(-i)=i,$$
$$z^4=(z^2)^2=(-1)^2=1,$$
$$z^5=z=-i,$$
$$\vdots$$

이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}1+z+z^2+\cdots+z^{100}&=1+(-i-1+i+1)+(-i-1+i+1)\\&\quad+\cdots+(-i-1+i+1)\\&=1+\underbrace{0+0+\cdots+0}_{25개}=1\end{aligned}$$

답 1

04-7

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $f(z)=2z+\overline{z}-3i$라 하자. 복소수 ω와 그 켤레복소수 $\overline{\omega}$에 대하여 $f(\overline{\omega}+1)=6$일 때, $f(-\omega)$의 값을 구하시오.

문제의 조건에 의하여

$$\begin{aligned}f(\overline{\omega}+1)&=2(\overline{\omega}+1)+\overline{(\overline{\omega}+1)}-3i\\&=2\overline{\omega}+\omega+3-3i=6\end{aligned}$$

이므로 $2\overline{\omega}+\omega=3+3i$이다. **켤레복소수 연산 법칙(p.138)**에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned}f(-\omega)&=-2\omega-\overline{\omega}-3i=-\overline{(2\overline{\omega}+\omega)}-3i\\&=-\overline{(3+3i)}-3i=-(3-3i)-3i=-3\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 **켤레복소수(p.126)**는 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$f(a+bi)=2(a+bi)+a-bi-3i=3a+(b-3)i$$

이고, $\omega=c+di$ (c, d는 실수)라 하면 켤레복소수는 $\overline{\omega}=c-di$이므로

$$f(\overline{\omega}+1)=f(c+1-di)=3(c+1)+(-d-3)i$$

이다. $f(\overline{\omega}+1)=6$이므로 **복소수가 서로 같을 조건(p.125)**에 의하여

$$3(c+1)=6,\quad -d-3=0$$

에서 $c=1$, $d=-3$이다. 따라서 $\omega=1-3i$이므로 구하는 값은

$$f(-\omega)=f(-1+3i)=-3$$

답 -3

04-8

복소수 $z=\frac{2+2\sqrt{2}i}{4-2\sqrt{2}i}\left(1-\frac{2\sqrt{2}-4i}{4+2\sqrt{2}i}\right)$에 대하여 $z^n=1$을 만족시키는 100이하의 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

$\alpha=\frac{2\sqrt{2}-4i}{4+2\sqrt{2}i}$, $\beta=\frac{2+2\sqrt{2}i}{4-2\sqrt{2}i}$라 할 때, **복소수의 나눗셈(p.129)**을 이용하면

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{2\sqrt{2}-4i}{4+2\sqrt{2}i}=\frac{(2\sqrt{2}-4i)(4-2\sqrt{2}i)}{(4+2\sqrt{2}i)(4-2\sqrt{2}i)}\\&=\frac{8\sqrt{2}-8i-16i+8\sqrt{2}i^2}{16-8i^2}\\&=\frac{-24i}{24}=-i\end{aligned}\quad\cdots㉠$$

이고

$$\beta=\frac{2+2\sqrt{2}i}{4-2\sqrt{2}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}+4i}{4-2\sqrt{2}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\alpha}=\frac{i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}i\quad\cdots㉡$$

이므로 ㉠, ㉡을 z에 대입하면

$$z=\beta(1-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}i(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}(i+i^2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$$

이다. 이때,

$$z^2=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\right\}^2=\frac{i^2-2i+1}{2}=-i$$

이므로 z^2을 **거듭제곱(p.139)**하면 $z^4=-1$, $z^6=i$, $z^8=1$이고 $z^n=1$이 되는 자연수 n은 8의 배수이다. 따라서 $z^n=1$을 만족시키는 100이하의 자연수 n의 최댓값은 96이다.

답 96

05 이차방정식

정의 & 포인트 확인

- 방정식 $ax=b$의 풀이
- 절댓값
- 절댓값과 부호
- 인수분해를 통한 풀이
- 이차방정식의 근의 공식
- 이차방정식의 실근과 허근

- 이차방정식의 판별식
- 이차방정식의 짝수 판별식

- 이차방정식의 근과 계수의 관계
- 두 수를 근으로 하는 이차방정식
- 이차방정식의 두 근을 이용한 인수분해
- 이차방정식의 켤레근

05-1 이차방정식의 풀이

방정식 $ax=b$의 풀이

문자의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 방정식이라 한다. 이때 방정식을 참이 되게 하는 문자의 값을 방정식의 해 또는 근이라 하고, 방정식의 해 또는 근을 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

x에 대한 방정식 $ax=b$를 풀어보자. 방정식 $2x=1$은 양변을 2로 나누면 해를 바로 구할 수 있지만, 방정식 $ax=b$는 x의 계수 a가 0일 수도 있으므로 경우를 나누어서 생각해야 한다.

- $a \neq 0$일 때, 방정식 $ax=b$의 양변을 a로 나누면 $x=\frac{b}{a}$이다.
- $a=0$일 때, 좌변은 항상 0이므로 우변 b의 값에 따라 해가 결정된다.
  (i) $b \neq 0$이면 $0 \cdot x=b$가 되어 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 성립하지 않는다. 즉, 방정식의 해가 없다. 이 경우를 불능(不能)이라 한다.
  (ii) $b=0$이면 $0 \cdot x=0$이 되어 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 성립한다. 즉, 방정식의 해가 무수히 많다. 이 경우를 부정(不定)이라 한다.

포인트
상 5.1

방정식 $ax=b$의 풀이

x에 대한 방정식 $ax=b$의 해는 다음과 같다.

- $a \neq 0$일 때, $x=\frac{b}{a}$
- $a=0$일 때, (i) $b \neq 0$이면 해가 없다. (불능)
  (ii) $b=0$이면 해가 무수히 많다. (부정)

예 시

x에 대한 방정식 $(a-1)x=a(a-1)$을 풀어보자.
(i) $a \neq 1$일 때, 양변을 $a-1$로 나누면 $x=a$이다.
(ii) $a=1$일 때, $0 \cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다.

절댓값을 포함한 방정식

실수 x의 절댓값 $|x|$는 수직선에서 원점과 실수 x를 나타내는 점 사이의 거리를 의미한다. 수직선에서 원점과 1 사이의 거리는 1이므로 $|1|=1$이고 원점과 -1 사이의 거리 또한 1이므로 $|-1|=1$이다.

정 의 상 5.2

절댓값

어떤 실수 x를 수직선에 대응시켰을 때, 수직선의 원점에서 실수 x까지의 거리를 실수 x의 **절댓값**이라 하고, 이것을 기호로 $|x|$로 나타낸다.

절댓값을 포함한 방정식을 풀 때에는 절댓값 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 x의 범위를 나누어 푼다.

포인트 상 5.3

절댓값과 부호

$|x|$와 $|x-a|$는 x의 범위에 따라 다음과 같은 값을 가진다.

- $|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0\text{일 때}) \\ -x & (x<0\text{일 때}) \end{cases}$
- $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a\text{일 때}) \\ -x+a & (x<a\text{일 때}) \end{cases}$

예 시

(1) 방정식 $|x-1|=2$를 풀어보자. 절댓값 안의 식 $x-1$이 0이 되도록 하는 x의 값이 $x=1$이므로 x의 범위를 $x<1$, $x\ge 1$로 나눌 수 있다.

(i) $x<1$일 때, $|x-1|=-x+1$이므로 방정식의 해는

$$-x+1=2 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

(ii) $x\ge 1$일 때, $|x-1|=x-1$이므로 방정식의 해는

$$x-1=2 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

(2) 방정식 $|x|+|x-1|=3$을 풀어보자. 절댓값 안의 식 x, $x-1$이 0이 되도록 하는 x의 값이 각각 $x=0$과 $x=1$이므로 x의 범위를 $x<0$, $0\le x<1$, $x\ge 1$로 나눌 수 있다.

(i) $x<0$일 때, $|x|=-x$, $|x-1|=-x+1$이므로 방정식의 해는

$$-x-x+1=3 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

(ii) $0\le x<1$일 때, $|x|=x$, $|x-1|=-x+1$이므로 방정식의 해는

$$x-x+1=3 \quad \Rightarrow \quad \text{해가 없다.}$$

(iii) $x\ge 1$일 때, $|x|=x$, $|x-1|=x-1$이므로 방정식의 해는

$$x+x-1=3 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.

한 걸음 더

등식 $|A|=B$

절댓값 기호를 1개 포함한 방정식의 경우 다음의 성질을 이용하면 구간을 나누지 않고도 방정식을 간단히 풀 수 있다.

$$|A|=B \text{ (단, } B>0) \quad \Longleftrightarrow \quad A=\pm B$$

방정식 $|x-1|=2$는 $x-1=\pm 2$이므로

(i) $x-1=-2$일 때, $x=-1$이다. (ii) $x-1=2$일 때, $x=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

절댓값의 성질

실수 x, y에 대하여

- $|x|=\sqrt{x^2}$
- $|x|\ge 0$
- $|x|=0 \Longleftrightarrow x=0$
- $|xy|=|x|\cdot|y|$
- $|x|^2=x^2$
- $|-x|=|x|$

절댓값을 풀 때, 등호는 어느 범위에 포함되어도 상관없다.

이차방정식의 풀이

상수 a, b, c에 대하여 x에 대한 방정식

$$ax^2+bx+c=0$$

이 이차방정식이라 하면 이차항의 계수가 $a\neq 0$인 것을 가정한다.

상수 a, b, c에 대하여 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$과 같은 꼴로 나타낼 수 있는 방정식을 이차방정식이라 한다.

인수분해를 통한 풀이

x에 대한 이차식 ax^2+bx+c가 $(px-q)(rx-s)$로 인수분해(p.81)되면 이차방정식 $ax^2+bx+c=(px-q)(rx-s)=0$의 근은 $x=\frac{q}{p}$ 또는 $x=\frac{s}{r}$이다.

포인트 상 5.4 인수분해를 통한 풀이

x에 대한 이차식 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이 $(px-q)(rx-s)$으로 인수분해되면 이차방정식

$$ax^2+bx+c=(px-q)(rx-s)=0$$

의 근은 $x=\frac{q}{p}$ 또는 $x=\frac{s}{r}$이다.

예시 이차식 x^2-1은 $(x-1)(x+1)$로 인수분해되므로 이차방정식 $x^2-1=0$의 근은

$$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

보기 5.1 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-9=0$　　(2) $x^2-3x+2=0$

이차방정식의 근의 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)의 근의 공식을 구해보자.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0\\
x^2+\frac{b}{a}x&=-\frac{c}{a} && \leftarrow \text{양변을 } a\text{로 나누고 상수항을 이항한다.}\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} && \leftarrow \text{양변에 } \left(\frac{b}{2a}\right)^2\text{을 더한다}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && \leftarrow \text{좌변을 완전제곱식으로 나타낸다.}\\
\therefore\ x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \leftarrow \text{제곱근을 구하고 } x\text{에 대하여 정리한다.}
\end{aligned}$$

이처럼 인수분해가 되지 않는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 완전제곱식의 꼴로 변형하여 해를 구하는 방법을 일반화한 것이 이차방정식의 근의 공식

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. 물론 인수분해가 되는 이차방정식에 대해서도 근의 공식을 사용할 수 있다.

보기 정답

5.1 (1) $x=-3$ 또는 $x=3$
(2) $x=1$ 또는 $x=2$

일차항의 계수가 짝수인 경우, 근의 공식에서 분자와 분모가 각각 2를 인수로 가지므로 약분할 수 있다. 이때 약분 과정을 미리 근의 공식에 포함시키면 계산과정을 줄일 수 있다. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b가 짝수인 경우 $b=2b'$이라 두고 근의 공식을 사용하면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

와 같이 간단히 할 수 있다.

포인트 상 5.5 **이차방정식의 근의 공식**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)에 대하여

- $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이다.
- $b=2b'$인 경우 $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$이다.

예 시

(1) 이차방정식 $x^2-x-1=0$에서 $a=1$, $b=-1$, $c=-1$이므로 방정식의 해는

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

(2) 이차방정식 $x^2+4x+5=0$에서 $a=1$, $b'=2$, $c=5$이므로 방정식의 해는

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot5}}{1}=-2\pm i$$

보기 5.2 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-2x-1=0$ (2) $x^2-x+1=0$

이차방정식의 실근과 허근

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. a, b, c가 모두 실수이므로 등식 우변의 계산 결과가 실수일 것으로 생각하지만 b^2-4ac의 값이 음수인 경우에는 실수가 아니다.

- $b^2-4ac\geq0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$가 실수이므로 이차방정식의 근도 실수이다.
- $b^2-4ac<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$가 허수이므로 이차방정식의 근도 허수이다.

따라서 계수가 실수인 이차방정식이 실수의 범위에서 항상 근을 가지는 것이 아님을 알 수 있다. 그러나 복소수(p.124)의 범위에서는 이차방정식은 반드시 해를 가진다. 이때 실수인 근을 실근이라 하고, 허수인 근을 허근이라 한다.

정 의 상 5.6 **이차방정식의 실근과 허근**

- 이차방정식의 실수인 근을 **실근**이라 한다.
- 이차방정식의 허수인 근을 **허근**이라 한다.

계수가 복소수인 이차방정식

계수가 복소수인 경우에도 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 근을 구할 수 있다. 이차방정식

$$x^2-ix-1=0$$

을 풀기 위하여 근의 공식에

$$a=1,\ b=-i,\ c=-1$$

을 대입하면 근은

$$\begin{aligned}x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{i\pm\sqrt{(-i)^2+4}}{2}\\&=\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

보기 정답

5.2 (1) $x=1\pm\sqrt{2}$
(2) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

방정식 $ax=b$의 풀이

예제 01 다음 x에 대한 방정식을 푸시오.

(1) $a(x-1)=2x+3$

(2) $(a^2-3)x=a-2ax+3$

길잡이 x에 대한 방정식이므로 주어진 식을 $ax=b$의 꼴로 정리하고 x의 계수가 0이 아닌 경우와 0인 경우로 나눈다. 이때, 방정식 $ax=b$의 해는 다음과 같다.

- $a\neq 0$일 때, $x=\frac{b}{a}$
- $a=0$일 때, (i) $b\neq 0$이면 해가 없다. (불능)
  (ii) $b=0$이면 해가 무수히 많다. (부정)

• 방정식 $ax=b$의 풀이(p.154)

풀 이

(1) 주어진 방정식을 정리하면

$$ax-2x=a+3 \quad \Rightarrow \quad (a-2)x=a+3$$

이다. 이때

(i) $a\neq 2$일 때, $x=\frac{a+3}{a-2}$이다.

(ii) $a=2$일 때, $0\cdot x=5$이므로 해가 없다.

(2) 주어진 방정식을 정리하면

$$(a^2+2a-3)x=a+3 \quad \Rightarrow \quad (a-1)(a+3)x=a+3$$

이다. 이때

(i) $a\neq -3$, $a\neq 1$일 때, $x=\frac{1}{a-1}$이다.

(ii) $a=-3$일 때, $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다.

(iii) $a=1$일 때, $0\cdot x=4$이므로 해가 없다.

정답 풀이 참조

돌다리 두드리기

x에 대한 방정식 $(a^2-6a+5)x=2(a-5)$를 푸시오.

$(a-1)(a-5)x=2(a-5)$이므로

(i) $a\neq 1$, $a\neq 5$일 때, $x=\frac{2}{a-1}$이다.

(ii) $a=1$일 때, 해가 없다.

(iii) $a=5$일 때, 해가 무수히 많다.

돌다리 두드리기

|답| $a=1$일 때, 해가 없다.
$a=5$일 때, 해가 무수히 많다.
$a\neq 1$, $a\neq 5$일 때, $x=\frac{2}{a-1}$

정답 및 풀이 p.513

개념 그대로

유제 01-1

x에 대한 방정식 $(a-1)(a+4)x=a(3x+2)$의 해가 존재하지 않도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 방정식을 정리하면

$$(a^2+3a-4)x=3ax+2a \quad \Rightarrow \quad (a^2-4)x=2a$$

이므로 $(a+2)(a-2)x=2a$이다. 이때

(i) $a=-2$ 또는 $a=2$일 때, $0=2a$이므로 해가 없다.

(ii) $a\neq-2$, $a\neq2$일 때, $x=\dfrac{2a}{a^2-4}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해가 존재하지 않도록 하는 a는 -2 또는 2이다.

답 -2 또는 2

개념 그대로

유제 01-2

x에 대한 방정식 $a(x-a)=3(x-3)$이 해가 무수히 많도록 하는 상수 a의 값을 N이라 하고, 해가 하나일 때의 해를 $f(a)$라 하자. $f(N)$의 값을 구하시오.

주어진 방정식을 정리하면

$$ax-a^2=3x-9 \quad \Rightarrow \quad (a-3)x=(a-3)(a+3)$$

이다. 이때

(i) $a=3$일 때, $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다. 따라서 $N=3$이다.

(ii) $a\neq3$일 때, $x=a+3$이므로 $f(a)=a+3$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $f(N)=f(3)=6$이다.

답 6

개념 그대로

유제 01-3

x에 대한 방정식 $(a^2-2)x+1=(x+5)a$의 해가 존재하지 않고, x에 대한 방정식 $a(x+1)=2x+3$의 해가 존재할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

x에 대한 방정식 $(a^2-2)x+1=(x+5)a$를 정리하면

$$(a^2-a-2)x=5a-1 \quad \Rightarrow \quad (a+1)(a-2)x=5a-1$$

이므로 $a=-1$ 또는 $a=2$일 때, 해가 존재하지 않는다.

한편, x에 대한 방정식 $a(x+1)=2x+3$을 정리하면

$$ax-2x=3-a \quad \Rightarrow \quad (a-2)x=3-a$$

이므로 $a\neq2$일 때, 해가 존재한다. 따라서 구하는 a의 값은 -1이다.

답 -1

예제 02

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $2x^2-4x+2=-x+7$ (2) $(x-2)(x-4)+1=0$

(3) $(2x-1)(2x+1)=x+1$ (4) $(1+i)x^2+(3i-1)x-2=0$

길잡이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)은 좌변을 인수분해하여 풀거나 근의 공식

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

을 이용하여 풀면 된다. 근의 공식을 이용할 때, 이차항의 계수가 무리수이거나 허수인 경우 유리화하거나 실수화하여 계산하는 것이 간편하다.

풀 이

- 이차방정식의 근의 공식(p.157)
- 인수분해를 통한 풀이(p.156)
- 복소수의 곱셈(p.128)
- 켤레복소수(p.126)

(1) 좌변으로 이항하여 인수분해하면

$$2x^2-4x+2=-x+7 \quad\Rightarrow\quad 2x^2-3x-5=(x+1)(2x-5)=0$$

이다. 따라서 이차방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$이다.

(2) 다항식 $(x-2)(x-4)+1$을 전개하여 인수분해하면

$$x^2-6x+8+1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-6x+9=(x-3)^2=0$$

이다. 따라서 이차방정식의 해는 $x=3$이다.

(3) $(2x-1)(2x+1)=4x^2-1$이므로 방정식을 정리하면

$$4x^2-1=x+1 \quad\Rightarrow\quad 4x^2-x-2=0$$

이다. 근의 공식을 이용하면 방정식의 해는

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot4\cdot(-2)}}{2\cdot4}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$$

(4) 이차항의 계수가 $1+i$이므로 양변에 켤레복소수 $\overline{1+i}=1-i$를 곱하여 정리하면

$$(1-i)\{(1+i)x^2+(3i-1)x-2\}=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+(1+2i)x+(i-1)=0$$

이다. 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{(1+2i)^2-4\cdot1\cdot(i-1)}}{2}=\frac{-(1+2i)\pm1}{2}$$

이다. 따라서 방정식의 해는 $x=-i$ 또는 $x=-1-i$이다.

정답 (1) $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$ (2) $x=3$
(3) $x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ (4) $x=-i$ 또는 $x=-1-i$

돌다리 두드리기

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $2x^2=x+1$ (2) $(x-1)^2=2x$

(1) $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0$이므로 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$
(2) 주어진 방정식을 정리하면 $x^2-4x+1=0$이므로 근의 공식을 이용하면
$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-1}=2\pm\sqrt{3}$이다.

돌다리 두드리기

|답| (1) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$
(2) $x=2\pm\sqrt{3}$

정답 및 풀이 p.513

개념 줄이기

유제 02-1

- 이차방정식의 근의 공식(p.157)
- 켤레복소수(p.126)

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $(x-2)^2=-8x$ (2) $(\sqrt{2}+1)x^2+x=2+\sqrt{2}$

(1) $(x-2)^2=x^2-4x+4$이므로 방정식을 정리하면

$$x^2-4x+4+8x=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2=0$$

이다. 따라서 이차방정식의 해는 $x=-2$이다.

(2) 이차항의 계수가 $\sqrt{2}+1$이므로 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하여 정리하면

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+2)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$$

이다. 인수분해를 하면

$$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=(x-1)(x+\sqrt{2})=0$$

이므로 구하는 이차방정식의 해는 $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$이다.

답 (1) $x=-2$ (2) $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

개념 줄이기

유제 02-2

- 인수분해를 통한 풀이(p.156)
- 복소수의 곱셈(p.128)
- 켤레복소수(p.126)

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $\frac{1}{4}x^2+x+2=0$ (2) $3x(\sqrt{3}-x)=2$

(1) 양변에 4를 곱하여 정리하면

$$x^2+4x+8=0$$

이므로 근의 공식을 이용하면 방정식의 해는

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-8}=-2\pm 2i$$

(2) 이항하여 정리하면

$$3x^2-3\sqrt{3}x+2=0$$

이므로 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-3\sqrt{3})\pm\sqrt{(-3\sqrt{3})^2-4\cdot 3\cdot 2}}{3\cdot 2}=\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{6}$$

이다. 따라서 방정식의 해는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

답 (1) $x=-2\pm 2i$ (2) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

개념 바꾸기

유제 02-3

- 인수분해를 통한 풀이(p.156)
- 켤레복소수(p.126)
+ 복소수(p.124)

이차방정식 $x^2+2x+10=0$의 한 근의 실수부분을 a라 하고 허수부분을 b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

주어진 이차방정식의 해는 근의 공식을 이용하면

$$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 10}=-1\pm 3i$$

이다. 따라서 $a=-1$, $b=\pm 3$이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$a^2+b^2=(-1)^2+(\pm 3)^2=1+9=10$$

답 10

한 근이 주어진 이차방정식

예제 03 이차방정식 $x^2+kx+2=0$의 한 근이 2일 때, 이차방정식 $x^2+kx+k(k+2)=0$의 해를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

길잡이 x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α라 하면 $x=\alpha$를 대입했을 때 등식이 성립한다. 즉, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$이다.

1 • 이차방정식의 실근과 허근(p.157)

2 • 이차방정식의 근의 공식(p.157)

풀 이

1단계 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+kx+2=0$에 $x=2$를 대입하면 다음과 같다.

$$2^2+2k+2=0 \quad \Rightarrow \quad k=-3$$

2단계 k의 값을 이차방정식 $x^2+kx+k(k+2)=0$에 대입하고 이 방정식의 해를 구한다.

$k=-3$을 방정식 $x^2+kx+k(k+2)=0$에 대입하면

$$x^2-3x-3\cdot(-1)=x^2-3x+3=0$$

이다. 근의 공식을 이용하면 방정식의 해는 다음과 같다.

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot(1)\cdot(3)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$$

정답 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

돌다리 두드리기

이차방정식 $x^2-x+k=0$의 한 근이 -1일 때, 이차방정식 $x^2-k^2x-(2k+1)=0$의 해를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

돌다리 두드리기

|답| $x=1$ 또는 $x=3$

$(-1)^2+1+k=0 \Rightarrow k=-2$이므로 주어진 이차방정식은
$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$이다. 따라서 $x=1$ 또는 $x=3$이다.

개념 바꾸기

유제 03-1

- 이차방정식의 근의 공식(p.157)
+ 인수분해를 통한 풀이(p.156)

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 한 근이 $\sqrt{3}$일 때, 나머지 한 근을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

$\sqrt{3}$이 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 한 근이므로 $x=\sqrt{3}$을 대입하면

$$(\sqrt{3})^2+a(\sqrt{3})+6=9+\sqrt{3}a=0 \quad\Rightarrow\quad a=-3\sqrt{3}$$

이 성립한다. 따라서 주어진 방정식은

$$x^2-3\sqrt{3}x+6=(x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$$

이므로 $x=\sqrt{3}$이 아닌 나머지 한 근은 $x=2\sqrt{3}$이다.

답 $x=2\sqrt{3}$

개념 줄이기

유제 03-2

- 이차방정식의 근의 공식(p.157)

x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+8=0$의 한 근이 $k+2$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$k+2$가 x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+8=0$의 한 근이므로 $x=k+2$를 대입하면

$$\begin{aligned}(k+2)^2-k(k+2)+8&=k^2+4k+4-k^2-2k+8\\&=2k+12=2(k+6)=0\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 구하는 값은 $k=-6$이다.

답 -6

개념 그대로

유제 03-3

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+x+a=0,\quad x^2+bx-4=0$$

이 $x=1$을 근으로 가질 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해를 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

1이 x에 대한 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 한 근이므로 $x=1$을 대입하면

$$1^2+1+a=0 \quad\Rightarrow\quad a=-2$$

가 성립한다. 또한 1이 x에 대한 이차방정식 $x^2+bx-4=0$의 한 근이므로 $x=1$을 대입하면

$$1^2+b-4=0 \quad\Rightarrow\quad b=3$$

이 성립한다. 따라서 이차방정식

$$x^2+ax+b=x^2-2x+3=0$$

의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면

$$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 3}=1\pm\sqrt{2}i$$

답 $x=1\pm\sqrt{2}i$

절댓값 기호를 포함한 이차방정식

예제 04 방정식 $x^2+|x+1|-1=0$을 푸시오.

길잡이 절댓값 기호를 포함한 방정식은

1. 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 x의 값을 찾는다.
2. 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 다음과 같이 절댓값 기호를 없앤 뒤, 방정식을 푼다.

$$|A|=\begin{cases} A & A\geq 0 \\ -A & A<0 \end{cases}$$

풀 이

1단계 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 x의 값을 찾고 범위를 나눈다.

주어진 이차방정식에서 절댓값 기호 안의 식 $x+1$이 0이 되는 x의 값은 $x=-1$이다.
$x=-1$을 기준으로 범위를 나누면

(i) $x<-1$일 때, $|x+1|=-(x+1)=-x-1$
(ii) $x\geq 1$일 때, $|x+1|=x+1$
과 같이 절댓값 기호를 없앨 수 있다.

2단계 범위에 따라 각각의 이차방정식을 푼다. 이때 이차방정식의 근이 범위에 포함되는지를 확인한다.

(i) $x<-1$일 때, 주어진 방정식은

$$\begin{aligned} x^2+|x+1|-1&=x^2-(x+1)-1=x^2-x-2 \\ &=(x+1)(x-2)=0 \end{aligned}$$

에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이다. 이때 두 값 모두 $x<-1$의 범위에 포함되지 않으므로 해가 없다.

(ii) $x\geq -1$일 때, 주어진 방정식은

$$\begin{aligned} x^2+|x+1|-1&=x^2+(x+1)-1=x^2+x \\ &=x(x+1)=0 \end{aligned}$$

에서 $x=-1$ 또는 $x=0$이다. 이때 두 값 모두 $x\geq -1$의 범위에 포함되므로 주어진 방정식의 해가 된다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=0$이다.

정답 $x=-1$ 또는 $x=0$

1 • 절댓값과 부호(p.155)
• 절댓값(p.155)

2 • 인수분해를 통한 풀이(p.156)

돌다리 두드리기

방정식 $x^2+|x|-2=0$을 푸시오.

$x<0$일 때 $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1$
$x\geq 0$일 때 $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1$

돌다리 두드리기
|답| $x=-1$ 또는 $x=1$

개념 바꾸기

유제 04-1

– 인수분해를 통한 풀이(p.156)
+ 이차방정식의 근의 공식(p.157)

방정식 $x^2+|x|-1=0$을 푸시오.

$x<0$일 때 $|x|=-x$이고, $x\geq 0$일 때 $|x|=x$이다.

(i) $x<0$일 때, 주어진 방정식은

$$x^2+|x|-1=x^2-x-1=0$$

이다. 근의 공식을 이용하면 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$이고 $x<0$의 범위를 만족하는 x는 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$이다.

(ii) $x\geq 0$일 때, 주어진 방정식은

$$x^2+|x|-1=x^2+x-1=0$$

이다. 근의 공식을 이용하면 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$이고 $x\geq 0$의 범위를 만족하는 x는 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이다.

답 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

개념 그대로

유제 04-2

방정식 $x|x-5|=6$의 모든 근의 합을 구하시오.

$x<5$일 때 $|x-5|=-x+5$이고, $x\geq 5$일 때 $|x-5|=x-5$이다.

(i) $x<5$일 때, 주어진 방정식에서

$$-x(x-5)=6 \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$$

이므로 $x=2$또는 $x=3$이다. 이때 두 값 모두 $x<5$의 범위를 만족한다.

(ii) $x\geq 5$일 때, 주어진 방정식에서

$$x(x-5)=6 \quad \Rightarrow \quad x^2-5x-6=(x+1)(x-6)=0$$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=6$이다. 그런데 $x\geq 5$이므로 $x=6$만 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=2,\ x=3,\ x=6$이므로 구하는 방정식의 모든 해의 합은 $2+3+6=11$이다.

답 11

개념 더하기

유제 04-3

+ 이차방정식의 근의 공식(p.157)

방정식 $x|x+2|=3|x+2|-4$에서 음수인 근의 합을 구하시오.

$x<-2$일 때 $|x+2|=-x-2$이고, $x\geq -2$일 때 $|x+2|=x+2$이다.

(i) $x<-2$일 때, 주어진 방정식에서

$$-x(x+2)=-3(x+2)-4 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-10=0$$

이므로 근의 공식을 이용하면 $x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}$이고 $\sqrt{41}>6$이므로 $x<-2$의 범위를 만족하는 x는 $x=\frac{1-\sqrt{41}}{2}$이다.

(ii) $x\geq -2$일 때, 주어진 방정식에서

$$x(x+2)=3(x+2)-4 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$$

에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이다. 이때 두 값 모두 $x\geq -2$를 만족한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{1-\sqrt{41}}{2}$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 음수인 근의 합은 다음과 같다.

$$-1+\frac{1-\sqrt{41}}{2}=-\frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

답 $-\frac{1+\sqrt{41}}{2}$

05-2 이차방정식의 판별식

이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식은 방정식의 해를 직접 구하지 않고도 근이 실근인지 허근인지를 판별할 수 있다. 이때 판별의 기준의 되는 식을 판별식이라 한다.

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. 이때 근호 안의 식 b^2-4ac의 부호에 따라 다음과 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 개수와 근의 종류를 알 수 있다.

- $b^2-4ac>0$이면, $\sqrt{b^2-4ac}$가 실수이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- $b^2-4ac=0$이면, $\sqrt{b^2-4ac}$가 0이므로 이차방정식은 서로 같은 두 실근을 갖는다.
- $b^2-4ac<0$이면, $\sqrt{b^2-4ac}$가 허수이므로 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이와 같이 이차방정식을 직접 풀지 않고도 b^2-4ac의 부호를 알면 이차방정식의 근이 실근인지 허근인지와 근의 개수를 판별할 수 있다. 따라서 b^2-4ac를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식이라 하고 기호는 D로 나타낸다.

이 단원부터는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수인 경우에 대해서만 다룬다.

서로 같은 두 실근을 중근이라 한다.

D는 판별식을 뜻하는 Discriminant의 첫 글자이다.

이차방정식이 실근을 갖는다. $\iff D\geq 0$

포인트 상 5.7 **이차방정식의 판별식**

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면

- $D>0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- $D=0 \iff$ 이차방정식은 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
- $D<0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

예시

(1) 이차방정식 $x^2+x-1=0$은 $D=1^2-4\cdot(-1)=5>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $x^2-4x+4=0$은 $D=4^2-4\cdot 4=0$이므로 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) 이차방정식 $3x^2+x+1=0$은 $D=1^2-4\cdot 3=-11<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

또한 $b=2b'$일 때 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=-\frac{b'}{a}\pm\frac{\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

이다. 같은 방법으로 근호 안의 식 b'^2-ac의 부호로 이차방정식의 근을 판별할 수 있다. 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식 D는

$$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$$

이므로 b'^2-ac의 값을 $\frac{D}{4}$로 나타내기로 한다.

포인트 상 5.8 **이차방정식의 짝수 판별식**

a, b', c가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$에서

- $\frac{D}{4}>0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- $\frac{D}{4}=0 \iff$ 이차방정식은 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
- $\frac{D}{4}<0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

예 시

(1) 이차방정식 $x^2+2x-1=0$은 $\frac{D}{4}=1^2+1=2>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $3x^2+2x+1=0$은 $\frac{D}{4}=1^2-3\cdot1=-2<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

보기 5.3 실수 k의 값에 따라 x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 근을 판별하시오.

(1) $k=1$　　(2) $k=2$　　(3) $k=3$

보기 5.4 x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

한 걸음 더

계수의 범위와 판별식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식은 계수가 실수인 경우에만 의미가 있다. 이차방정식 $x^2-2ix-5=0$에 대하여 판별식 $\frac{D}{4}=i^2+5=4>0$이지만, 근의 공식을 이용하면

$$x=i\pm\sqrt{i^2+5}=i\pm2$$

로 서로 다른 두 허근을 가진다. 따라서 계수가 실수가 아닌 이차방정식에 대하여 b^2-4ac의 부호로 실근과 허근을 판별할 수 없고, 직접 근을 구하여 판단해야 한다. 그러나 계수가 실수일 때와 비슷하게 근의 개수는 판단할 수 있다.

- $D=0 \iff$ 이차방정식은 중근을 갖는다.
- $D\neq0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 근을 갖는다.

보기 정답

5.3 (1) 서로 다른 두 허근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 실근

5.4 $a=0$ 또는 $a=4$

예제 05 x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k+2=0$이 다음 조건을 만족할 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. (2) 중근을 갖는다.
(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다.

길잡이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 판별식

$$D=b^2-4ac$$

를 이용하여 근을 다음과 같이 근을 판별한다.

- $D>0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- $D=0 \iff$ 이차방정식은 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
- $D<0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

• 이차방정식의 짝수 판별식(p.167)

풀이

공통 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-2k+2)=2k-2$$

이다. 따라서 각각의 조건에 따른 k의 범위를 구하면 다음과 같다.

(1) 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 $\frac{D}{4}>0$이므로

$$2k-2>0 \quad \Rightarrow \quad k>1$$

(2) 주어진 이차방정식이 중근을 가지면 $\frac{D}{4}=0$이므로

$$2k-2=0 \quad \Rightarrow \quad k=1$$

(3) 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지면 $\frac{D}{4}<0$이므로

$$2k-2<0 \quad \Rightarrow \quad k<1$$

정답 (1) $k>1$ (2) $k=1$ (3) $k<1$

돌다리 두드리기

이차방정식 $x^2-2(k+2)x+k^2=0$이 다음 조건을 만족할 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. (2) 중근을 갖는다.
(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다.

돌다리 두드리기
|답| (1) $k>-1$ (2) $k=-1$ (3) $k<-1$

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-k^2=4k+4$이므로
(1) $\frac{D}{4}>0 \iff k>-1$ (2) $\frac{D}{4}=0 \iff k=-1$
(3) $\frac{D}{4}<0 \iff k<-1$

개념 더하기

유제 05-1

+ 이차방정식의 판별식(p.166)

다음 중 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. $-x^2+3x+1=0$　　ㄴ. $3x^2-4x-12=0$　　ㄷ. $3x^2+2x+3=0$

ㄹ. $2x^2-4x=4x-8$　　ㅁ. $4(x-1)^2=x+1$　　ㅂ. $(2x+3)(x-1)=2x-5$

ㄱ. 이차방정식 $-x^2+3x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot1=13>0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $3x^2-4x-12=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-3\cdot(-12)=40>0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $3x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-3\cdot3=-8<0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄹ. 주어진 이차방정식을 정리하면 $2x^2-8x+8=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-2\cdot8=0$$

이므로 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다.

ㅁ. 주어진 이차방정식을 정리하면 $4x^2-9x+3=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-9)^2-4\cdot4\cdot3=33>0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㅂ. 주어진 이차방정식을 정리하면 $2x^2-x+2=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot2=-15<0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

개념 그대로

유제 05-2

x에 대한 이차방정식 $(k+2)x^2+2kx+k+3=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오.

x에 대한 방정식 $(k+2)x^2+2kx+k+3=0$이 이차방정식이므로 x^2항의 계수는 0이 아니다. 즉 $k\neq-2$이다. 또한 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 서로 다른 두 실근을 가지므로 $D>0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)(k+3)=-5k-6>0 \quad\Rightarrow\quad k<-\frac{6}{5}$$

이고 $k\neq-2$이므로 k의 최댓값은 -3이다.

답 -3

개념 바꾸기

유제 05-3

− 이차방정식의 짝수 판별식(p.167)
+ 이차방정식의 판별식(p.166)

x에 대한 이차식 $x^2+(k-2)x+k-3$이 완전제곱식이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

x에 대한 이차식 $x^2+(k-2)x+k-3$이 완전제곱식이 되기 위해서는 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-2)x+k-3=0$이 중근을 가져야 한다. 따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$$D=(k-2)^2-4(k-3)=k^2-8k+16=(k-4)^2=0$$

에서 $k=4$이다.

답 4

05-3 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)의 두 근을 각각 α, β라 하면 **이차방정식의 근의 공식**(p.157)에 의하여

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. 이때

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

이다. 따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합과 곱은 근을 직접 구하지 않아도 방정식의 계수를 이용하여 간단히 구할 수 있다.

이차방정식의 두 근의 차
허수는 대소관계를 판단할 수 없으므로 이차방정식이 실근을 가질 때만 두 근의 차를 생각한다.

또한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β가 실근인 경우, 두 근의 차는

$$|\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

이다. 판별식 $D=b^2-4ac$이므로 간단히 $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$라 나타낼 수도 있다.

포인트 상 5.9 **이차방정식의 근과 계수의 관계**

- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)의 두 근 α, β가 실근이면

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

예시

(1) 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 $D=5>0$이므로

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1,\quad |\alpha-\beta|=\sqrt{5}$$

(2) 이차방정식 $ax^2+x+b=0$의 두 근이 -1, $\frac{1}{2}$이면

$$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{a},\ -1\cdot\frac{1}{2}=\frac{b}{a}\quad\Rightarrow\quad a=2,\ b=-1$$

보기 5.5 이차방정식 $x^2+6x+7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta$　　(2) $\alpha\beta$　　(3) $|\alpha-\beta|$

보기 정답
5.5 (1) -6 (2) 7 (3) $2\sqrt{2}$

두 수를 근으로 하는 이차방정식

앞서 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀어 보았고, 이차방정식을 풀지 않고도 두 근의 합과 곱을 구하는 방법을 알아보았다. 이번에는 주어진 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구하여 보자.

x^2의 계수가 1이고 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$으로 나타낼 수 있다. 이 방정식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

이다. 즉, 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은 두 근의 합과 곱으로 표현할 수 있다.

포인트 상 5.10 **두 수를 근으로 하는 이차방정식**

x^2의 계수가 1이고 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은 다음과 같다.

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

예 시 두 수 $1+i$, $1-i$를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$\text{두 근의 합}=(1+i)+(1-i)=2,\quad \text{두 근의 곱}=(1+i)\cdot(1-i)=2$$

이므로 $x^2-2x+2=0$이다.

보기 5.6 다음 두 수를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $2,\ 3$ (2) $-1+i,\ -1-i$

이차방정식의 두 근을 이용한 인수분해

이차식을 인수분해할 때에는 일반적으로 **인수분해 공식 I(p.81)**을 이용한다. 하지만 이차식 x^2+2x+2는 공식을 이용하여 간단히 인수분해하기 어렵다. 이처럼 공식을 이용하기 힘든 경우에는 방정식의 근을 직접 구하여 인수분해할 수 있다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)은 복소수의 범위에서 항상 근을 가진다. 이 두 근을 α, β라 하면 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$이므로

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\ &=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

로 인수분해된다. 따라서 이차식 ax^2+bx+c는 복소수의 범위에서 항상 두 일차식의 곱으로 인수분해된다.

x^2의 계수가 a인 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 최고차항의 계수가 a인 이차방정식은

$$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$$

이다.

보기 정답

5.6 (1) $x^2-5x+6=0$
(2) $x^2+2x+2=0$

포인트 상 5.11 **이차방정식의 두 근을 이용한 인수분해**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차식 ax^2+bx+c는

$$a(x-\alpha)(x-\beta)$$

로 인수분해된다.

예 시

이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 해는 $x=1\pm i$이다. 따라서 이차식 x^2-2x+2는 복소수의 범위에서

$$x^2-2x+2=\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=(x-1-i)(x-1+i)$$

와 같이 인수분해된다.

보기 5.7 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

(1) x^2+2 (2) x^2+4x+2

계수의 범위와 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $\sqrt{2}$일 때, 다른 한 근은 무엇일까? 일반적으로 이차방정식의 계수 a, b, c의 값을 알지 못하면 다른 한 근을 알 수가 없다. 하지만 특정한 조건에서는 이차방정식의 한 근을 알면 나머지 한 근을 구할 수 있다.

유리수 계수를 가지는 이차방정식

유리수 a, b, c에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $\alpha=p+q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)라 하자. 그러면 이차식 $P(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $P(\alpha)=0$이므로

$$\begin{aligned}P(\alpha)&=a(p+q\sqrt{m})^2+b(p+q\sqrt{m})+c\\&=\{a(p^2+mq^2)+bp+c\}+\sqrt{m}(2apq+bq)=0\end{aligned}$$

이다. 무리수가 서로 같을 조건(p.125)에 의하여

$$a(p^2+mq^2)+bp+c=0,\qquad 2apq+bq=0 \qquad \cdots(5.3.1)$$

이다. 이제 $\beta=p-q\sqrt{m}$이라 하고 $P(\beta)$의 값을 구해보면

$$\begin{aligned}P(\beta)&=a(p-q\sqrt{m})^2+b(p-q\sqrt{m})+c\\&=\{a(p^2+mq^2)+bp+c\}-\sqrt{m}(2apq+bq)\end{aligned}$$

이고, (5.3.1)에 의하여 $P(\beta)=0$이다. 따라서 유리수 계수를 가지는 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

보기 정답

5.7 (1) $(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$
(2) $(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$

실수 계수를 가지는 이차방정식

실수 a, b, c에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하자. 그러면 이차식 $P(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $P(\alpha)=0$이므로

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= a(p+qi)^2+b(p+qi)+c \\ &= \{a(p^2-q^2)+bp+c\}+(2apq+bq)i=0 \end{aligned}$$

이다. 복소수가 서로 같을 조건(p.125)에 의하여

$$a(p^2-q^2)+bp+c=0, \qquad 2apq+bq=0 \qquad \cdots(5.3.2)$$

이다. 이제 $\beta=p-qi$라 하고 $P(\beta)$의 값을 구해보면

$$\begin{aligned} P(\beta) &= a(p-qi)^2+b(p-qi)+c \\ &= \{a(p^2-q^2)+bp+c\}-(2apq+bq)i \end{aligned}$$

이고, (5.3.2)에 의하여 $P(\beta)=0$이다. 따라서 실수 계수를 가지는 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.

포인트 상 5.12 **이차방정식의 켤레근**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여

- a, b, c가 유리수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다. (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)
- a, b, c가 실수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$이다.)

예 시

(1) a, b가 유리수일 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
(2) a, b가 실수일 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}i$이면 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}i$이다.

보기 5.8 다음 물음에 답하시오.

(1) a, b가 유리수일 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이다. 나머지 한 근을 구하시오.
(2) a, b가 실수일 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+i$이다. 나머지 한 근을 구하시오.

방정식의 계수와 근의 형태

- 계수가 모두 유리수인 이차방정식의 중근은 무리수가 아니다.
- 계수가 모두 실수인 이차방정식의 중근은 허수가 아니다.
- 계수가 모두 실수인 이차방정식이 두 허근을 가지면 두 허근은 반드시 켤레복소수(p.126) 관계에 있다.

보기 정답

5.8 (1) $x=2+\sqrt{3}$ (2) $x=2-i$

이차방정식의 근과 계수의 관계 1

예제 06 이차방정식 $x^2-3x+6=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)$　　(2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

(3) $\alpha^3+\beta^3$　　(4) $\alpha^4+\beta^4$

길잡이 주어진 식을 **곱셈 공식의 변형**을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$로 이루어진 식으로 변형하고, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)의 두 근을 α, β라고 할 때

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

임을 이용하면 식의 값을 계산할 수 있다.

- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
- 곱셈 공식의 변형 I(p.23)
- 다항식의 곱셈(p.20)

풀이

공통 이차방정식 $x^2-3x+6=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=6$$

이다. 각각의 구하는 식을 변형하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 대입하면 다음과 같다.

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=6-3+1=4$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot6=-3$이므로

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=27-3\cdot6\cdot3=-27$

(4) (2)에서 계산한 $\alpha^2+\beta^2=-3$을 이용하면

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2\\&=(-3)^2-2\cdot6^2=-63\end{aligned}$$

정답 (1) 4　(2) $-\frac{1}{2}$　(3) -27　(4) -63

돌다리 두드리기

이차방정식 $x^2+x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

돌다리 두드리기

|답| (1) -1　(2) -10

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-3$이므로

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-1$

(2) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-1-3\cdot(-3)\cdot(-1)=-10$

정답 및 풀이 p.515

개념 그대로

유제 06-1

이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $|\alpha-\beta|$　　(3) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$이다. 각각의 구하는 식을 변형하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 대입하면 다음과 같다.

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\cdot1=7$

(2) 주어진 이차방정식의 판별식 $D=3^2-4=5>0$이므로 α, β는 실수이다.
따라서 $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=7-2\cdot1=5$이므로
$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{5}$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$
$=\dfrac{(-3)^3-3\cdot1\cdot(-3)}{1^2}=-18$

답 (1) 7　(2) $\sqrt{5}$　(3) -18

개념 그대로

유제 06-2

이차방정식 $2x^2-4x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$의 값을 구하시오.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$이다. $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$을 인수분해하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 대입하면 다음과 같다.

$$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$
$$=\frac{3}{2}\left(2^2-2\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

답 $\dfrac{3}{2}$

개념 줄이기

유제 06-3

– 곱셈 공식의 변형 I(p.23)

이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2-\alpha-2)(\beta^2-\beta-2)$의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로
$$\alpha^2-2\alpha-4=0,\quad \beta^2-2\beta-4=0$$
이다. 따라서 주어진 식을 변형하면
$$(\alpha^2-\alpha-2)(\beta^2-\beta-2)$$
$$=\{(\alpha^2-2\alpha-4)+\alpha+2\}\{(\beta^2-2\beta-4)+\beta+2\}$$
$$=(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$$
이다. 이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-4$$
이므로 구하는 값은 다음과 같다.
$$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=-4+2\cdot2+4=4$$

답 4

예제 07 x에 대한 이차방정식 $x^2-7x+k=0$이 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(1) 두 근의 비가 $2:5$이다.　　　(2) 두 근의 차가 9이다.

길잡이 이차방정식의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우

- 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq 0)$
- 두 근의 차가 d이면 한 근을 α, 다른 한 근을 $\alpha+d$

로 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하자.

• 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

풀 이

(1) 두 근의 비가 $2:5$이므로 이차방정식 $x^2-7x+k=0$의 두 근을 2α, 5α $(\alpha\neq 0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\alpha+5\alpha=7\alpha=7 \quad\Rightarrow\quad \alpha=1$$
$$2\alpha\cdot 5\alpha=k \quad\Rightarrow\quad 10\alpha^2=k$$

이므로 $k=10\alpha^2=10$이다.

(2) 두 근의 차가 9이므로 이차방정식 $x^2-7x+k=0$의 두 근을 α, $\alpha+9$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\alpha+9=2\alpha+9=7 \quad\Rightarrow\quad \alpha=-1$$
$$\alpha(\alpha+9)=k \quad\Rightarrow\quad \alpha^2+9\alpha=k$$

이므로 $k=\alpha^2+9\alpha=(-1)^2+9\cdot(-1)=-8$이다.

정답 (1) 10　(2) -8

돌다리 두드리기

x에 대한 이차방정식 $x^2+10x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, k의 값을 구하시오.

두 근을 2α, 3α로 놓으면

$$2\alpha+3\alpha=-10,\quad 2\alpha\cdot 3\alpha=k$$

이다. 따라서 $\alpha=-2$, $k=24$이다.

돌다리 두드리기

|답| 24

개념 그대로

유제 07-1

x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-1)x+12=0$의 두 근이 모두 양수이고 비가 $1:3$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

두 근의 비가 $1:3$이므로 이차방정식 $x^2-(k-1)x+12=0$의 두 근을 α, 3α $(\alpha>0)$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+3\alpha=k-1 \quad \Rightarrow \quad k=4\alpha+1$$
$$\alpha\cdot 3\alpha=12 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2=4$$

이다. 이때 $\alpha>0$이므로 $\alpha=2$이고, 구하는 값은 $k=4\alpha+1=9$이다.

답 9

개념 그대로

유제 07-2

x에 대한 이차방정식 $x^2-(k+1)x+k=0$의 한 근이 다른 근의 2배일 때, 자연수 k의 값을 구하시오.

이차방정식의 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq 0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha=k+1 \quad \Rightarrow \quad k=3\alpha-1$$
$$\alpha\cdot(2\alpha)=k \quad \Rightarrow \quad k=2\alpha^2$$

이다. 두 식을 연립하여 k를 소거하면

$$2\alpha^2-3\alpha+1=(2\alpha-1)(\alpha-1)=0$$

에서 $\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=1$이다.

(i) $\alpha=\frac{1}{2}$일 때, $k=\frac{1}{2}$ (ii) $\alpha=1$일 때, $k=2$

이다. 따라서 구하는 자연수 k는 2이다.

답 2

개념 그대로

유제 07-3

x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+2a-2=0$의 두 근이 연속인 자연수가 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

이차방정식의 두 근을 n, $n+1$ (n은 자연수)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n+n+1=a \quad \Rightarrow \quad a=2n+1 \quad \cdots ㉠$$
$$n(n+1)=2a-2 \quad \Rightarrow \quad n^2+n=2a-2 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$n^2+n=2(2n+1)-2 \quad \Rightarrow \quad n(n-3)=0$$

이고 n이 자연수이므로 $n=3$이다. 이를 ㉠에 대입하면 구하는 값은 $a=7$이다.

답 7

두 수를 근으로 하는 이차방정식

예제 08 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 이차방정식을 구하시오.

(1) $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식

(2) α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식

길잡이 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고, 이를 이용하여 주어진 두 수의 합과 곱을 계산하여 조건에 맞는 이차방정식을 구한다. 이때, x^2의 계수가 1이고 두 수 a, b를 근으로 하는 이차방정식은

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab=0$$

임을 이용한다.

- 두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)
- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
- 곱셈 공식의 변형 I(p.23)

풀 이

공통 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=2$$

(1) 두 수 $\alpha-1$과 $\beta-1$의 합과 곱을 각각 구하면

$$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2=4-2=2$$
$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2-4+1=-1$$

이다. 따라서 $\alpha-1$과 $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-2x-1=0$$

(2) 두 수 α^2과 β^2의 합과 곱을 각각 구하면

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha\beta)=4^2-2\cdot2=12$$
$$\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=4$$

이다. 따라서 α^2과 β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-12x+4=0$$

정답 (1) $x^2-2x-1=0$ (2) $x^2-12x+4=0$

돌다리 두드리기

이차방정식 $x^2+3x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| $x^2+x+3=0$

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=5$이고

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=-1, \quad (\alpha+1)(\beta+1)=3$$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2+x+3=0$이다.

정답 및 풀이 p.516

개념 그대로

유제 08-1

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α^3, β^3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$이다. 이를 이용하여 두 수 α^3과 β^3의 합과 곱을 각각 구하면

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot3\cdot2=-10$$

$$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=3^3=27$$

이다. 따라서 α^3과 β^3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2+10x+27=0$$

답 $x^2+10x+27=0$

개념 줄이기

유제 08-2

– 곱셈 공식의 변형 I(p.23)

이차방정식 $x^2+5x-6=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-6$이다. 이를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 합과 곱을 각각 구하면

$$\alpha+\beta+\alpha\beta=-5-6=-11$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=(-5)\cdot(-6)=30$$

이다. 따라서 x^2의 계수가 1이고 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+11x+30=0$이고 구하는 값은 $a+b=11+30=41$이다.

답 41

개념 그대로

유제 08-3

이차방정식 $2x^2-3x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 8인 이차방정식을 구하시오.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=2$이다. 이를 이용하여 $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$의 합과 곱을 각각 구하면

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-\frac{7}{8},\quad \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=1$$

이다. 따라서 x^2의 계수가 1이고 $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2+\frac{7}{8}x+1=0$$

이다. 구하는 이차방정식은 x^2의 계수가 8이므로 방정식의 양변에 8을 곱하면

$$8x^2+7x+8=0$$

답 $8x^2+7x+8=0$

이차방정식의 두 근을 이용한 인수분해

예제 09 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

(1) $2x^2-5x+1$ (2) x^2+4x+7

길잡이 근의 공식을 이용하여 구한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차식 ax^2+bx+c는

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

와 같이 인수분해된다.

풀 이

(1) 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $2x^2-5x+1=0$의 두 근을 구하면

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot1}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

이다. 따라서 이차식 $2x^2-5x+1$은 복소수의 범위에서 다음과 같이 인수분해된다.

$$2x^2-5x+1=2\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{8}(4x-5-\sqrt{17})(4x-5+\sqrt{17})$$

(2) 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2+4x+7=0$의 두 근을 구하면

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot7}=-2\pm\sqrt{3}i$$

이다. 따라서 이차식 x^2+4x+7은 복소수의 범위에서 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^2+4x+7=(x+2+\sqrt{3}i)(x+2-\sqrt{3}i)$$

정답 (1) $\frac{1}{8}(4x-5-\sqrt{17})(4x-5+\sqrt{17})$
(2) $(x+2+\sqrt{3}i)(x+2-\sqrt{3}i)$

- 두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)
- 이차방정식의 근의 공식(p.157)
- 복소수(p.124)

돌다리 두드리기

이차식 $x^2-2x+10$을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

근의 공식에 의하여 $x=1\pm3i$ 이므로,
$x^2-2x+10=(x-1+3i)(x-1-3i)$

돌다리 두드리기

|답| $(x-1+3i)(x-1-3i)$

정답 및 풀이 p.516

개념 그대로

유제 09-1

다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

(1) x^2+6x+7　　　　(2) $3x^2-4x+2$

(1) 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2+6x+7=0$의 두 근을 구하면

$$x=-3\pm\sqrt{3^2-7}=-3\pm\sqrt{2}$$

이다. 따라서 이차식 x^2-6x+7은 복소수의 범위에서 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^2-6x+7=(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$$

(2) 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $3x^2-4x+2=0$의 두 근을 구하면

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot2}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$$

이다. 따라서 이차식 $3x^2-4x+2$는 복소수의 범위에서 다음과 같이 인수분해된다.

$$\begin{aligned}3x^2-4x+2&=3\left(x-\frac{2-\sqrt{2}i}{3}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}i}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}(3x-2+\sqrt{2}i)(3x-2-\sqrt{2}i)\end{aligned}$$

답 (1) $(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$
(2) $\frac{1}{3}(3x-2+\sqrt{2}i)(3x-2-\sqrt{2}i)$

개념 그대로

유제 09-2

다항식 $x(x^2+2)-x^3+2x^2+1$을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

주어진 식을 정리하면

$$x(x^2+2)-x^3+2x^2+1=2x^2+2x+1$$

이고 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $2x^2+2x+1=0$의 해를 구하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-2\cdot1}}{2}=\frac{-1\pm i}{2}$$

이다. 따라서 이차식 $2x^2+2x+1$은 복소수의 범위에서 다음과 같이 인수분해된다.

$$\begin{aligned}2x^2+2x+1&=2\left(x-\frac{-1+i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(2x+1-i)(2x+1+i)\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}(2x+1-i)(2x+1+i)$

개념 그대로

유제 09-3

이차식 $2x^2+4x+8$을 복소수의 범위에서 인수분해하면 $a(x+b+ci)(x+b-ci)$이다. 실수 a, b, c의 곱 abc의 값을 구하시오. (단, $c>0$이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $2x^2+4x+8=0$의 두 근을 구하면

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\cdot8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}=-1\pm\sqrt{3}i$$

이다. 따라서 이차식 $2x^2+4x+8$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$2x^2+4x+8=2(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$$

이므로 $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$이다. 따라서 구하는 값은

$$abc=2\cdot1\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

예제 10 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 한 근이 $2+\sqrt{5}$일 때, 유리수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 한 근이 $1+2i$일 때, 실수 a, b의 값의 값을 각각 구하시오.

길잡이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

- **a, b, c가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.**
  (단, p, q는 유리수이고 $\sqrt{m}$은 무리수이다.)
- **a, b, c가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.**
  (단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$이다.)

- 이차방정식의 켤레근(p.173)
- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

풀 이

(1) 이차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4 \quad \Rightarrow \quad a=-4$$
$$b=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=4-5=-1$$

이므로 $a=-4$, $b=-1$이다.

(2) 이차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+2i$이므로 다른 한 근은 $1-2i$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(1+2i)+(1-2i)=2 \quad \Rightarrow \quad a=-2$$
$$b=(1+2i)(1-2i)=1-4i^2=5$$

이므로 $a=-2$, $b=5$이다.

정답 (1) $a=-4$, $b=-1$ (2) $a=-2$, $b=5$

돌다리 두드리기

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 한 근이 $-1+\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 한 근이 $-2-4i$일 때, 실수 a, b의 값을 각각 구하시오.

돌다리 두드리기

답 (1) $a=2$, $b=-2$ (2) $a=4$, $b=20$

(1) 다른 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이므로

$$a=-\{(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})\}=2$$
$$b=(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=-2$$

(2) 다른 한 근이 $-2+4i$이므로

$$a=-\{(-2+4i)+(-2-4i)\}=4$$
$$b=(-2+4i)(-2-4i)=4-16i^2=20$$

개념 그대로

유제 10-1

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

이차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $b+\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b \quad \Rightarrow \quad b=1$$

$$a=(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=1-3i^2=4$$

이므로 구하는 값은 $a+b=5$이다.

답 5

개념 더하기

유제 10-2

+ 두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한근이 $2+\sqrt{3}$일 때 두 수 $a+b$, ab를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

이차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \quad \Rightarrow \quad a=-4$$

$$b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$$

이다. 따라서 두 수 $a+b=-3$, $ab=-4$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$(a+b)+ab=(-3)+(-4)=-7, \quad (a+b)(ab)=(-3)\cdot(-4)=12$$

이므로 $x^2+7x+12=0$이다.

답 $x^2+7x+12=0$

개념 더하기

유제 10-3

+ 복소수의 나눗셈(p.129)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{3-i}{1+i}$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

주어진 근의 분모를 실수화하면

$$\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-4i+i^2}{2}=1-2i$$

이다. 실수 계수 이차방정식의 한 근이 $1-2i$이므로 나머지 한 근은 $1+2i$이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(1+2i)+(1-2i)=2 \quad \Rightarrow \quad a=-2$$

$$b=(1+2i)(1-2i)=1-4i^2=5$$

이므로 구하는 값은 $a+b=3$이다.

답 3

연습은 실전처럼

05-1 이차방정식의 풀이 [1-4]

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $3x(x+8)=4(2x+3)$ (2) $9x^2+32=0$

(3) $2x^2-\sqrt{3}x-4=0$ (4) $4x^2+2x+1=0$

(1) 주어진 등식을 이항하여 **인수분해(p.156)**하면

$3x^2+16x-12=(3x-2)(x+6)=0$이므로 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=-6$이다.

(2) $x^2=-\frac{32}{9}$이므로 $x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}i$이다.

(3) **근의 공식(p.157)**을 이용하여 주어진 방정식을 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot2\cdot(-4)}}{2\cdot2}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{35}}{4}$$

(4) **근의 공식(p.157)**을 이용하면 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}$

답 (1) $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=-6$ (2) $x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}i$

(3) $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{35}}{4}$ (4) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}$

05-2

x에 대한 이차방정식 $2x^2+(2k-1)x-k=0$의 한 근이 -6일 때, 다른 한 근을 α라 하자. αk의 값을 구하시오.

주어진 등식의 양변에 $x=-6$을 대입하면

$$72+(2k-1)(-6)-k=78-13k=0$$

에서 $k=6$이다. 따라서 주어진 **이차방정식(p.156)**을 풀면

$$2x^2+11x-6=(2x-1)(x+6)=0$$

이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$이다. 따라서 구하는 값은 $\alpha k=\frac{1}{2}\cdot6=3$이다.

답 3

05-3

x에 대한 방정식 $(k+4)(k-3)x=k^2+k(x+2)-8x$의 해가 무수히 많도록 하는 상수 k의 값을 m, 해가 없도록 하는 상수 k의 값을 n이라 할 때, $m-n$의 값을 구하시오.

주어진 방정식을 전개한 뒤 정리하면

$$(k^2+k-12)x=(k-8)x+k^2+2k$$

$$(k^2-4)x=k(k+2)$$

$$(k-2)(k+2)x=k(k+2) \quad \cdots ㉠$$

이다. 이 **방정식(p.154)**은

(i) $k+2=0$, 즉 $k=-2$일 때, 해가 무수히 많으므로 $m=-2$이다.

(ii) $k-2=0$, 즉 $k=2$일 때, ㉠에서 $0=2\cdot4=8$이므로 해가 없다. 따라서 $n=2$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $m-n=-2-2=-4$이다.

답 -4

05-4

방정식 $x|2x-3|+1=0$을 푸시오.

절댓값 기호(p.155) 안의 식이 0이 되는 x의 값은 $x=\frac{3}{2}$이므로

(i) $x\geq\frac{3}{2}$일 때, $|2x-3|=2x-3$이므로 주어진 **이차방정식(p.156)**은

$$x|2x-3|+1=x(2x-3)+1=2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$$

에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다. 이때 $x\geq\frac{3}{2}$이므로 해가 없다.

(ii) $x<\frac{3}{2}$일 때, $|2x-3|=-(2x-3)$이므로 주어진 방정식은

$$x|2x-3|+1=-2x^2+3x+1=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2-3x-1=0$$

이므로 $x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ 이다. 이때 $\sqrt{17}>4$이므로 $x<\frac{3}{2}$를 만족시키는 x는 $x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$이다.

답 $x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$

05-5 이차방정식의 판별식 [5-6]

x에 대한 이차방정식 $x^2-(k+1)x+1=0$이 중근을 가지고, x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 k의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2-(k+1)x+1=0$이 중근을 가지므로, 이 이차방정식의 **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$D=(k+1)^2-4=k^2+2k-3=(k-1)(k+3)=0$$

에서 $k=1$ 또는 $k=-3$이다. 한편, 이차방정식 $x^2+2x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D'이라 하면 $\frac{D'}{4}=1-k>0$에서 $k<1$이므로 주어진 조건을 만족하는 k의 값은 $k=-3$뿐이다.

답 -3

05-6

x에 대한 이차방정식 $x^2-(2a+m)x+a^2+4a+2n=0$이 실수 a의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $m+n$의 값을 구하시오.

주어진 이차방정식의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때

$$\begin{aligned}D&=(2a+m)^2-4(a^2+4a+2n)\\&=4a^2+4am+m^2-4a^2-16a-8n\\&=4am+m^2-16a-8n\\&=4a(m-4)+m^2-8n\end{aligned}$$

이고 주어진 이차방정식이 중근을 가지기 위해서는

$$4a(m-4)+m^2-8n=0$$

이 성립해야 한다. 이 식이 a의 값에 관계없이 성립하기 위해서는 **항등식의 성질(p.49)**에 의하여

$$m-4=0,\quad m^2-8n=0$$

에서 $m=4$, $n=2$이다. 따라서 구하는 값은 $m+n=6$이다.

답 6

05-7 이차방정식의 근과 계수의 관계 [7-12]

x에 대한 이차방정식 $x^2-(3a-2)x+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)$의 값을 구하시오.
(단, a는 실수이다.)

α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2-(3a-2)\alpha+1=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2-3a\alpha+1=-2\alpha$$
$$\beta^2-(3a-2)\beta+1=0 \quad \Rightarrow \quad \beta^2-3a\beta+1=-2\beta$$

이고, **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 $\alpha\beta=1$이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$(\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)=(-2\alpha)\cdot(-2\beta)$$
$$=4\alpha\beta=4$$

답 4

05-8

이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4+\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하시오.

α, β가 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이므로

$$\alpha^2+\alpha-1=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2+\alpha=1$$
$$\beta^2+\beta-1=0 \quad \Rightarrow \quad \beta^2+\beta=1$$

이다. **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$이므로 **곱셈 공식의 변형(p.23)**을 이용하여 주어진 식의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4+\alpha^3+\beta^3$$
$$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)+\beta^3(\beta^2+\beta+1)=2(\alpha^3+\beta^3)$$
$$=2\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}=2\cdot(-4)=-8$$

[다른 풀이]
$x^5+x^4+x^3$에서 x^2+x-1을 나눈 몫은 x^3+2x-2이고 나머지는 $4x-2$이므로

$$x^5+x^4+x^3=(x^3+2x-2)(x^2+x-1)+4x-2$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$(\text{주어진 식})=(4\alpha-2)+(4\beta-2)=4(\alpha+\beta)-4=-8$$

답 -8

05-9

x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 모든 상수 k의 값의 곱을 구하시오.

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여

$$2\alpha+3\alpha=k-1 \quad \Rightarrow \quad k=5\alpha+1 \qquad \cdots ㉠$$
$$2\alpha\cdot3\alpha=k \quad \Rightarrow \quad k=6\alpha^2 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 따라서

$$6\alpha^2=5\alpha+1 \quad \Rightarrow \quad (\alpha-1)(6\alpha+1)=0$$

에서 $\alpha=-\frac{1}{6}$ 또는 $\alpha=1$이다. 각 값을 ㉠에 대입하면 $k=\frac{1}{6}$ 또는 $k=6$이다. 따라서 모든 k의 곱은 $\frac{1}{6}\times6=1$이다.

답 1

05-10

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta^2}{\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 $\alpha+\beta=4$이고, $\alpha\beta=1$에서

$$\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{64-3\cdot1\cdot4}{1}=52$$
$$\frac{\beta^2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta}=\alpha\beta=1$$

이므로 $\frac{\beta^2}{\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{\beta}$를 **두 근으로 하는 이차방정식(p.171)**은 $x^2-52x+1=0$이다.

답 $x^2-52x+1=0$

05-11

이차식 $2x^2-3x+2$를 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$2x^2-3x+2=2(x+a+bi)(x+c+di)$$

이다. $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 실수이다.)

이차방정식 $2x^2-3x+2=0$의 **해(p.157)**는 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$이므로

$$2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)\left(x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$a+b+c+d=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}=-\frac{3}{2}$$

[다른 풀이]
$-a-bi$가 이차방정식 $2x^2-3x+2=0$의 한 근이면 $-a+bi$도 **근(p.173)**이 된다.
따라서 $a=c$, $b=-d$이고 $-a-bi+(-a+bi)=-2a=\frac{3}{2}$이므로 구하는 값은

$$a+b+c+d=a+b+a-b=2a=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

05-12

x에 대한 이차방정식 $x^2+(a+b)x+c+d=0$의 한 근이 $3-i$이고 x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-b)x+(c-d)=0$의 한 근이 $2+\sqrt{2}$일 때, 네 유리수 a, b, c, d에 대하여 $a^2-b^2+c^2-d^2$의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2+(a+b)x+c+d=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $3-i$이므로 **다른 한 근(p.173)**은 $3+i$이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=-\{(3-i)+(3+i)\}=-6 \qquad \cdots ㉠$$
$$c+d=(3-i)(3+i)=10 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 또한 이차방정식 $x^2+(a-b)x+(c-d)=0$의 한 근이 $2+\sqrt{2}$이고 계수가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{2}$이다. 따라서 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여

$$a-b=-\{(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})\}=-4 \qquad \cdots ㉢$$
$$c-d=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2 \qquad \cdots ㉣$$

이다. 따라서

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=24, \quad c^2-d^2=(c+d)(c-d)=20$$

이므로 구하는 값은 $a^2-b^2+c^2-d^2=44$이다.

답 44

05-1

두 실수 a, b에 대하여 $\circ$를 $a\circ b=2ab-a-b$로 정의할 때, 등식 $(x\circ x)+(3\circ x)+2x=0$을 만족시키는 모든 x의 값을 구하시오.

등식 $(x\circ x)+(3\circ x)+2x=0$에서 $\circ$의 정의를 이용하여 좌변을 정리하면

$$(2x^2-x-x)+(6x-3-x)+2x=2x^2+5x-3$$

이다. 따라서 구하는 x는 **이차방정식(p.156)** $2x^2+5x-3=0$의 해이므로

$$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)=0$$

이고 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-3$이다.

답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-3$

05-2

x에 대한 이차방정식 $x^2-3ix-k-9i=0$가 실근을 가질 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

주어진 이차방정식이 **실근(p.157)** α를 가진다고 하면

$$\alpha^2-3i\alpha-k-9i=0$$

이고 이 식의 좌변을 **실수부분(p.124)**과 **허수부분(p.124)**으로 나누면

$$\alpha^2-k-(3\alpha+9)i=0$$

이다. 이때 **복소수가 서로 같을 조건(p.125)**에 의하여

$$\alpha^2-k=0,\ 3\alpha+9=0$$

이므로 $\alpha=-3$, $k=9$이다.

답 9

05-3

영준, 예진 두 학생이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 푸는데, 영준이는 x의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $3\pm\sqrt{2}$를 얻었고, 예진이는 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 2, 3을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

영준이는 상수항을 바르게 보았으므로 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여

$$b=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$$

이고 예진이는 x의 계수를 바르게 보았으므로 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여

$$-a=2+3=5\ \Rightarrow\ a=-5$$

이다. 따라서 두 학생이 풀려고 한 이차방정식은

$$x^2-5x+7=0$$

이고 **근의 공식(p.157)**을 이용하여 이 이차방정식을 풀면

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot7}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$$

답 $x=\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

05-4

x, y에 대한 이차식 $x^2+2xy-3y^2+4x-2y+k$가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 실수 k의 값을 구하시오.

$x^2+2xy-3y^2+4x-2y+k$를 x에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하면

$$x^2+2(y+2)x-3y^2-2y+k$$

이므로 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(y+2)x-3y^2-2y+k=0$의 **판별식(p.166)**을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(y+2)^2-(-3y^2-2y+k)$$
$$=4y^2+6y+4-k$$

가 완전제곱식이어야 한다. 즉 y에 대한 이차방정식 $4y^2+6y+4-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=3^2-4(4-k)=0$$

이므로 $4k-7=0$에서 $k=\frac{7}{4}$이다.

답 $\frac{7}{4}$

05-5

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 x에 대한 이차식

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$

가 완전제곱식일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 이차식이 완전제곱식이 되기 위해서는 이차방정식

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)\\&=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0\end{aligned}$$

이 중근을 가져야 한다. 따라서 이 이차방정식의 **판별식(p.167)**을 D라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0\end{aligned}$$

이므로 $a=b$, $b=c$, $c=a$일 때, 주어진 이차식이 완전제곱식이 된다. 따라서 $a=b=c$이므로 구하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

05-6

x^2의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\alpha=3+2i$는 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이고 $(\alpha-1)(3+i)$는 이차방정식 $g(x)=0$의 한 근이다. 이차방정식 $f(x)+g(x)=0$의 두 근의 곱을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이고 $f(x)$, $g(x)$의 계수는 모두 실수이다.)

이차방정식 $f(x)=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $3+2i$이므로 **다른 한 근(p.173)**은 $3-2i$이다. 따라서 x^2의 계수가 1이고 $3+2i$, $3-2i$를 **두 근으로 하는 이차방정식(p.171)**은

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-\{(3+2i)+(3-2i)\}x+(3+2i)(3-2i)\\&=x^2-6x+13=0\end{aligned}$$

이다. 한편, $(\alpha-1)(3+i)=(2+2i)(3+i)=4+8i$이므로 이차방정식 $g(x)=0$의 계수가 실수이고, $(\alpha-1)(3+i)$가 한 근이면 다른 한 근은 $4-8i$이다. 따라서 x^2의 계수가 1이고 $4+8i$, $4-8i$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$\begin{aligned}g(x)&=x^2-\{(4+8i)+(4-8i)\}x+(4+8i)(4-8i)\\&=x^2-8x+80=0\end{aligned}$$

이다. 이차방정식 $f(x)+g(x)=0$은

$$f(x)+g(x)=2x^2-14x+93=0$$

이므로 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 이차방정식 $f(x)+g(x)=0$의 두 근의 곱은 $\frac{93}{2}$이다.

답 $\frac{93}{2}$

05-7

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $|\alpha|+|\beta|=6$이다. 실수 k의 값을 구하시오.

이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=k$이다.
$|\alpha|+|\beta|=6$의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|\\&=16-2k+2|k|=36\end{aligned}$$

이다. 따라서

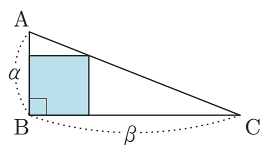
$$|k|-k=10 \qquad \cdots ㉠$$

을 얻는다. $k\geq 0$일 때, $|k|=k$에서 ㉠은 $0=10$이므로 성립하지 않는다. 따라서 $k<0$에서 $|k|=-k$이고 이를 ㉠에 대입하면 $k=-5$이다.

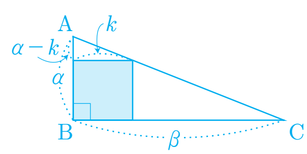
답 -5

05-8 교육청 기출

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자. $\overline{AB}=\alpha$, $\overline{BC}=\beta$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 넓이와 둘레의 길이를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식이 $4x^2+mx+n=0$일 때, 두 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. (단, 정사각형의 두 변은 선분 AB와 선분 BC 위에 있다.)



이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 **근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$이다. 직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면



$$\alpha:\beta=\alpha-k:k \quad\Rightarrow\quad k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{1}{2}$$

이다. 따라서 정사각형의 넓이 $k^2=\frac{1}{4}$과 둘레의 길이 $4k=2$를 **두 근으로 하고(p.171)** 이차항의 계수가 4인 이차방정식은

$$4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)=4x^2-9x+2=0$$

이다. 따라서 $m=-9$, $n=2$이므로 구하는 값은 $m+n=-9+2=-7$이다.

답 -7

06 이차방정식과 이차함수

+ 정의 & 포인트 확인

- 이차함수 $y=ax^2$의 그래프
- 이차함수의 표준형
- 이차함수의 일반형
- 이차함수와 이차방정식의 관계
- 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

- 함수의 최대, 최소
- 이차함수의 최대, 최소
- 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

06-1 이차방정식과 이차함수

이차함수의 그래프

> 실수 a, b, c에 대하여 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 $a \neq 0$인 것을 가정한다.

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 이차식 $ax^2+bx+c\,(a\neq 0,\ a,\ b,\ c$는 실수)로 나타날 때, 이 함수를 x에 대한 이차함수라 한다.

이차함수의 그래프의 개형은 포물선이라 불리는 U자 형태의 곡선이다. 모든 포물선은 하나의 직선에 대칭이다. 이때 그 직선을 포물선의 축이라 한다. 또한 이차함수의 그래프와 축이 만나는 점을 포물선의 꼭짓점이라 한다.

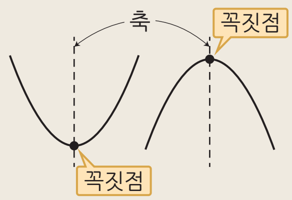


그림 6.1. 포물선의 축과 꼭짓점

이차함수 $y=ax^2$의 꼴

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 원점이 꼭짓점이고 y축을 축으로 하는 포물선이다. $a>0$이면 그래프는 아래로 볼록하고 $a<0$이면 그래프는 위로 볼록하다. a의 절댓값이 커질수록 그래프의 폭이 좁아져서 y축에 가까워진다.

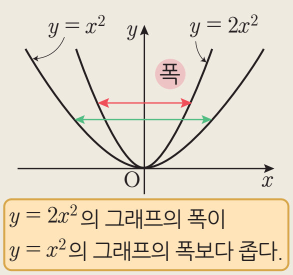


그림 6.2. 이차함수 그래프의 폭

포인트 상 6.1 **이차함수 $y=ax^2$의 그래프**

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는

- 원점을 꼭짓점으로 하고 y축을 축으로 하는 포물선이다.
- $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.
- a의 절댓값이 커질수록 그래프의 폭이 좁아진다.

보기 6.1 다음 중 옳은 것은 '참', 틀린 것은 '거짓'이라 쓰시오.

(1) 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 이차함수 $y=2x^2$의 그래프보다 폭이 넓다.

(2) 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 아래로 볼록하다.

(3) 이차함수 $y=3x^2$의 그래프의 꼭짓점은 $(0,\ 0)$이다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다. $y=a(x-p)^2+q$의 꼴을 이차함수의 표준형이라 한다.

보기 정답

6.1 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

포인트 상 6.2 **이차함수의 표준형**

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는

- 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
- 점 (p, q)를 꼭짓점으로 하고 직선 $x=p$를 축으로 하는 포물선이다.

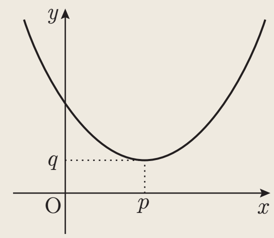


그림 6.3. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

예 시 이차함수 $y=(x-3)^2-2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

보기 6.2 이차함수 $y=2(x-3)^2+1$의 그래프에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 꼭짓점의 좌표 (2) 축

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼴

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면 꼭짓점의 좌표와 축을 쉽게 파악할 수 있다. $y=ax^2+bx+c$의 꼴을 이차함수의 일반형이라 한다.

$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c && \leftarrow \text{최고차항의 계수로 묶어준다.}\\
&=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c && \leftarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2\text{을 더하고 뺀다.}\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} && \leftarrow \text{식을 정리하여 표준형으로 만든다.}
\end{aligned}
$$

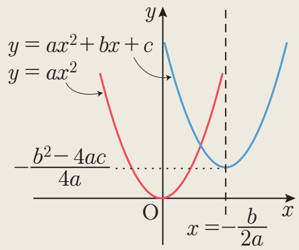


그림 6.4. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

포인트 상 6.3 **이차함수의 일반형**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$는

- 표준형으로 바꾸면 $y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$이다.
- 그래프는 점 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$를 꼭짓점으로 하고 직선 $x=-\frac{b}{2a}$를 축으로 하는 포물선이다.

이차함수 계수의 부호

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서

- a의 부호는 그래프의 볼록성, a의 절댓값은 그래프의 폭
- b의 부호는 축의 위치
- c의 부호는 y절편의 위치

와 관계가 있다.

예 시 이차함수 $y=2x^2-4x+3$을 표준형으로 바꾸면 $y=2(x-1)^2+1$이므로 이 이차함수의 그래프는 점 $(1, 1)$을 꼭짓점으로 하고 직선 $x=1$을 축으로 하는 포물선이다.

보기 6.3 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 꼭짓점의 좌표 (2) 축

보기 정답

6.2 (1) $(3, 1)$ (2) $x=3$

6.3 (1) $(2, -3)$ (2) $x=2$

이차함수와 이차방정식의 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 교점은 y좌표가 0인 점이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

- **서로 다른 두 점에서 만나는 경우** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 α, β이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근도 α, β이다.
  또한, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이 α, β이면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 α, β이다.
- **한 점에서 만나는 경우 (접하는 경우)** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 한 점 $(\alpha, 0)$에서 만나면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 중근 α를 가진다.
  또한, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근 α를 가지면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축은 한 점 $(\alpha, 0)$에서 만난다.
- **만나지 않는 경우** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나지 않으면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 실근을 갖지 않는다.
  또한, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 갖지 않으면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축은 만나지 않는다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.

이차방정식의 실근의 개수는 판별식(p.166) $D=b^2-4ac$의 부호를 이용하여 구할 수 있으므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

포인트 상 6.4 **이차함수와 이차방정식의 관계**

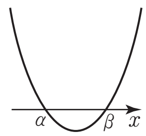
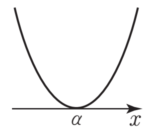
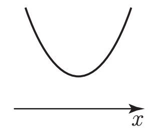
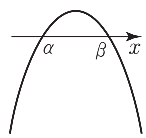
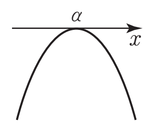
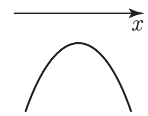
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축에 대하여

- 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.
- 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.
- 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 결정된다.

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
위치관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

함수의 그래프와 방정식의 관계

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 y의 값이 0인 점 (x, y)의 x좌표를 구하는 것과 같다. 이는 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 근	서로 다른 두 실근	서로 같은 두 실근 (중근)	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
$a>0$일 때 $y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$a<0$일 때 $y=ax^2+bx+c$의 그래프			

예 시

(1) 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-3)=4>0$$

이므로 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot3=-2<0$$

이므로 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

(3) 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$$

이므로 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다. (접한다.)

보기 6.4 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-4x+3$ (2) $y=x^2-4x+4$ (3) $y=x^2-4x+5$

보기 정답

6.4 (1) 2 (2) 1 (3) 0

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는

$$ax^2+bx+c=mx+n$$

을 만족하는 x의 값, 즉 이차방정식

$$ax^2+(b-m)x+(c-n)=0 \qquad \cdots (6.1.1)$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 만나는 점의 개수는 이차방정식 (6.1.1)의 실근의 개수와 같으므로 이차방정식 (6.1.1)의 판별식 D의 부호에 따라 결정된다.

포인트 상 6.5 **이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식

$$ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$$

의 판별식 D의 부호에 따라 결정된다.

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
위치관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

예 시

이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=x-k$의 교점의 개수는 이차방정식

$$x^2-x=x-k \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+k=0$$

의 실근의 개수와 같다.

(1) 판별식 $\dfrac{D}{4}=1-k>0$, 즉 $k<1$이면 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=x-k$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

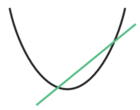
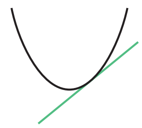
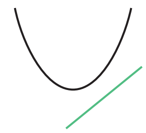
(2) 판별식 $\dfrac{D}{4}=1-k=0$, 즉 $k=1$이면 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=x-k$는 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) 판별식 $\dfrac{D}{4}=1-k<0$, 즉 $k>1$이면 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=x-k$는 서로 만나지 않는다.

보기 6.5 이차함수 $y=x^2+5x-1$의 그래프와 직선 $y=x-5$의 위치 관계를 구하시오.

보기 정답

6.5 한 점에서 만난다. (접한다.)

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 근	서로 다른 두 실근	서로 같은 두 실근 (중근)	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c\,(a>0)$와 직선 $y=mx+n$의 그래프			

이차함수의 접선의 방정식

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계에서 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 $D=0$인 경우 이차함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만난다. 이때 직선은 이차함수의 그래프에 접한다고 하며, 이 직선을 이차함수 그래프의 접선, 교점을 접점이라 한다.

이차함수 $y=x^2$에 접하고 기울기가 2인 직선을 구해보자. 접선의 방정식을 $y=2x+n$이라 놓으면 방정식

$$x^2=2x+n \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-n=0 \qquad \cdots(6.1.2)$$

의 판별식 $\dfrac{D}{4}=1+n=0$이어야 한다. 즉, $n=-1$이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=2x-1$이다. 이때 이차함수 $y=x^2$과 직선 $y=2x-1$의 교점, 즉 접점의 좌표를 구하면

$$x^2=2x-1 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+1=(x-1)^2=0$$

이므로 $x=1$이다. 이때 $x=1$을 이차함수 $y=x^2$에 대입하면 함숫값은 $y=1$이므로 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

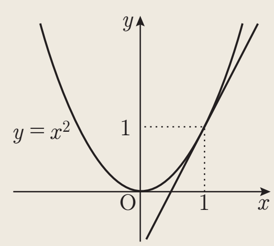


그림 6.5. 이차함수 $y=x^2$에 접하고 기울기가 2인 접선

보기 6.6 이차함수 $y=x^2+5x-1$의 그래프와 직선 $y=x+k$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 직선이 이차함수의 그래프에 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

(2) 접점의 좌표를 구하시오.

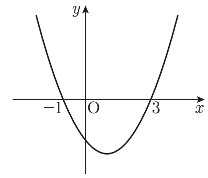
보기 정답

6.6 (1) -5 (2) $(-2,\ -7)$

이차함수의 그래프

예제 01

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음의 부호를 정하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



(1) a (2) b (3) c

(4) $a+b+c$ (5) $a-b+c$ (6) $4a-2b+c$

길잡이

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 통해 계수 a, b, c의 부호를 다음과 같이 판단할 수 있다.

- a: 아래로 볼록하면 $a>0$, 위로 볼록하면 $a<0$
- b: 축의 방정식이 $x=p$일 때 $p=-\dfrac{b}{2a}$이므로
  - (i) $p<0$이면 a, b는 같은 부호, 즉 $ab>0$
  - (ii) $p=0$이면 $b=0$
  - (iii) $p>0$이면 a, b는 다른 부호, 즉 $ab<0$
- c: y절편이 양수이면 $c>0$, y절편이 0이면 $c=0$, y절편이 음수이면 $c<0$

풀이

(1) 주어진 이차함수의 그래프는 아래로 볼록하므로 x^2항의 계수인 a는 $a>0$이다.

(2) 주어진 이차함수의 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}>0$이다.
이때, $a>0$이므로 $b<0$이다.

(3) 주어진 이차함수의 y절편이 x축보다 아래에 있으므로 $c<0$이다.

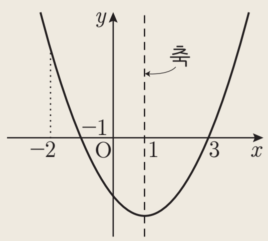
(4) 이차식 ax^2+bx+c에 $x=1$을 대입하면 $a+b+c$임을 이용하자. 이차함수의 그래프에서 $x=1$일 때, 함숫값이 x축보다 아래에 있으므로 $a+b+c<0$이다.

(5) 이차식 ax^2+bx+c에 $x=-1$을 대입하면 $a-b+c$임을 이용하자. 이차함수의 그래프에서 $x=-1$일 때, 함숫값이 x축 위에 있으므로 $a-b+c=0$이다.

(6) 이차식 ax^2+bx+c에 $x=-2$를 대입하면 $4a-2b+c$임을 이용하자. 이차함수의 그래프에서 $x=-2$일 때, 함숫값이 x축보다 위에 있으므로 $4a-2b+c>0$이다.

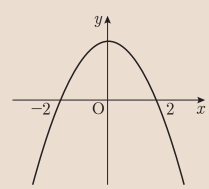
정답 (1) $a>0$ (2) $b<0$ (3) $c<0$ (4) $a+b+c<0$ (5) $a-b+c=0$ (6) $4a-2b+c>0$

- 이차함수의 일반형(p.191)
- 이차함수 $y=ax^2$의 그래프(p.190)



돌다리 두드리기

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음의 부호를 정하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



(1) a (2) $-b+c$

(3) $a+b+c$ (4) $9a+3b+c$

돌다리 두드리기

|답| (1) $a<0$ (2) $-b+c>0$
(3) $a+b+c>0$ (4) $9a+3b+c<0$

(1) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$이다.
(2) 그래프의 축이 y축이므로 $-\dfrac{b}{2a}=0$에서 $b=0$이고, y절편이 양수이므로 $c>0$에서 $-b+c>0$이다.
(3) $f(x)=ax^2+bx+c$라 놓으면 $f(1)=a+b+c>0$이다.
(4) $f(3)=9a+3b+c<0$이다.

개념 더하기

유제 01-1

+ 인수분해를 통한 풀이(p.156)

다음 이차함수에 대하여 각각 꼭짓점과 x절편을 구하시오.

(1) $y=(x-1)^2-4$　　(2) $y=-x^2+3x+4$

(1) $y=(x-1)^2-4$는 이차함수 $y=x^2$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점은 $(1,\ -4)$이다. 또한, $y=0$일 때,

$$(x-1)^2-4=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$$

에서 $x=-1,\ 3$이므로 x절편은 -1 또는 3 이다.

(2) $y=-x^2+3x+4$를 표준형으로 변형하면 $y=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$이므로 꼭짓점은 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{25}{4}\right)$이다. 또한, $y=0$일 때,

$$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)=0$$

에서 $x=-1,\ 4$이므로 x절편은 -1 또는 4이다.

답 (1) 꼭짓점: $(1,\ -4)$, x절편: -1 또는 3

(2) 꼭짓점: $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{25}{4}\right)$, x절편: -1 또는 4

개념 그대로

유제 01-2

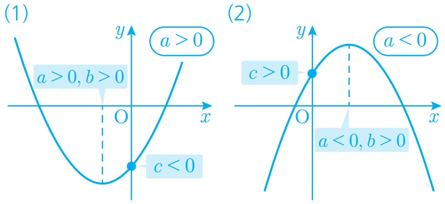
$a,\ b,\ c$의 부호가 다음과 같을 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형을 그리시오.

(1) $a>0,\ b>0,\ c<0$　　(2) $a<0,\ b>0,\ c>0$

(1) 주어진 함수는 $a>0$이므로 아래로 볼록하고, $a,\ b$가 같은 부호이므로 축의 x좌표가 음수이다. 또한, $c<0$이므로 y절편이 음수이다. 이와 같은 그래프는 그림과 같은 개형을 가진다.

(2) 주어진 함수는 $a<0$이므로 위로 볼록하고, $a,\ b$가 다른 부호이므로 축의 x좌표가 양수이다. 또한, $c>0$이므로 y절편이 양수이다. 이와 같은 그래프는 그림과 같은 개형을 가진다.

(1)　(2)



답 (1) 풀이 참조　(2) 풀이 참조

개념 그대로

유제 01-3

다음을 만족하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내시오.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이고 원점을 지난다.

(2) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 1)$이고 y절편이 3이다.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로

$$y=a(x+1)^2+2$$

라 놓을 수 있다. 이 그래프가 원점을 지나므로 $x=0,\ y=0$을 대입하면 $a+2=0$에서 $a=-2$이다. 따라서 구하려는 이차함수의 식은 $y=-2(x+1)^2+2=-2x^2-4x$이다.

(2) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 1)$이므로

$$y=a(x+2)^2+1=ax^2+4ax+4a+1$$

이라 놓을 수 있다. 이 그래프의 y절편이 3이므로 $4a+1=3$이다. 따라서 $a=\dfrac{1}{2}$이고, 구하려는 이차함수의 식은 $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$이다.

답 (1) $y=-2x^2-4x$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$

예제 02 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$에서 만날 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

길잡이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나면, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, β이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

가 성립한다.

풀이

1단계 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 생각한다.

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 -2, 4이므로 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 실근이 -2, 4임을 알 수 있다.

1 • 이차함수와 이차방정식의 관계(p.192)

2단계 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합})=-\frac{a}{2}=2$$

$$(\text{두 근의 곱})=\frac{b}{2}=-8$$

이므로 $a=-4$, $b=-16$이다.

2 • 두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)
• 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

[다른 풀이]
최고차항의 계수가 2이고 두 수 -2, 4를 근으로 하는 이차방정식이므로

$$2(x+2)(x-4)=2(x^2-2x-8)=2x^2-4x-16=0$$

이다. 따라서 $a=-4$, $b=-16$임을 알 수 있다.

정답 $a=-4$, $b=-16$

돌다리 두드리기

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$을 지날 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| 5

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 1이므로 최고차항의 계수가 1이고, 두 근의 합이 -2, 곱이 -3인 이차방정식은 $x^2+2x-3=0$이다. 즉, $a=2$, $b=-3$이므로 $a-b=5$이다.

정답 및 풀이 p.521

개념 그대로

유제 02-1

이차함수 $y=ax^2+bx+3$의 그래프가 x축과 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$과 만날 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

이차함수 $y=ax^2+bx+3$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{b}{a}=2$이므로 $b=-2a$이고, $\dfrac{3}{a}=-3$에서 $a=-1$이다. 따라서 $b=2$이다.

답 $a=-1,\ b=2$

개념 바꾸기

유제 02-2

− 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
＋ 이차방정식의 짝수 판별식(p.167)

이차함수 $y=x^2-12x+a$의 그래프가 점 $(1,\ b)$를 지나고 x축과 접할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

이차함수 $y=x^2-12x+a$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2-12x+a=0$이 중근을 가져야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2-12x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-6)^2-1\cdot a=36-a=0$$

에서 $a=36$이고 $y=x^2-12x+36$의 그래프가 점 $(1,\ b)$를 지나므로

$$b=1^2-12\cdot 1+36=25$$

답 $a=36,\ b=25$

개념 바꾸기

유제 02-3

− 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
＋ 이차방정식의 짝수 판별식(p.167)

이차함수 $y=x^2+8x-4k$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때, 정수 k의 최댓값을 구하시오.

이차함수 $y=x^2+8x-4k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+8x-4k=0$이 허근을 가져야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2+8x-4k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-1\cdot(-4k)=16+4k<0$$

에서 $k<-4$를 만족해야 한다. 이를 만족하는 정수 k의 최댓값은 -5이다.

답 -5

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

예제 03

이차함수 $y=x^2+4kx+4k^2-4k+4$의 그래프는 상수 k의 값에 관계없이 항상 직선 l에 접한다. 이때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

길잡이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식

$$ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$$

의 실근의 개수와 관련이 있다. 이차방정식의 판별식을 D라 하면

- $D>0 \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
- $D=0 \iff$ 한 점에서 만난다. (접한다.)
- $D<0 \iff$ 만나지 않는다.

풀 이

1단계 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용한다.

직선 l의 방정식을 $y=ax+b$라 하자. 이차함수가 직선 l에 접하므로 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계에 의하여 이차방정식

$$x^2+4kx+4k^2-4k+4=ax+b$$

$$\Rightarrow \quad x^2+(4k-a)x+(4k^2-4k+4-b)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이 k의 값에 관계없이 중근을 가져야 한다.

2단계 이차방정식의 판별식을 이용하여 답을 구한다.

이때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=(4k-a)^2-4(4k^2-4k+4-b)=0$$

이 k의 값에 관계없이 항상 성립하여야 한다. k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(16-8a)k+(a^2+4b-16)=0$$

이고, 항등식의 성질에 의하여

$$16-8a=0, \quad a^2+4b-16=0$$

이다. $16-8a=0$에서 $a=2$이므로 $a^2+4b-16=0$에 대입하면 $b=3$이다. 따라서 직선 l의 방정식은 $y=2x+3$이다.

정답 $y=2x+3$

1 • 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계(p.194)

2 • 이차방정식의 판별식(p.166)
• 항등식의 성질 I(p.49)

돌다리 두드리기

이차함수 $y=x^2+2ax+4$의 그래프가 직선 $y=ax+3$과 한 점에서 만날 때, 자연수 a의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| 2

이차방정식 $x^2+2ax+4=ax+3 \Rightarrow x^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=a^2-4=0$이다. 따라서 자연수 a의 값은 2이다.

정답 및 풀이 p.521

개념 줄이기

유제 03-1

– 항등식의 성질 I(p.49)

이차함수 $y=-2x^2+x-k$의 그래프와 직선 $y=-x+3$이 만나지 않을 때, 실수 k의 범위를 구하시오.

이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면 다음 이차방정식

$$-2x^2+x-k=-x+3 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-2x+(k+3)=0$$

이 실근을 가지지 않아야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(k+3)=-2k-5<0$$

이다. 따라서 이를 만족시키는 실수 k의 범위는 $k>-\frac{5}{2}$이다.

답 $k>-\frac{5}{2}$

개념 바꾸기

유제 03-2

– 이차방정식의 판별식(p.166)
– 항등식의 성질 I(p.49)
+ 이차방정식의 짝수 판별식(p.167)

이차함수 $y=x^2+2x-1$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 최솟값을 구하시오.

이차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면, 다음 이차방정식

$$x^2+2x-1=-3x+k \quad \Rightarrow \quad x^2+5x-(k+1)=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$$D=25+4(k+1)>0 \quad \Rightarrow \quad 4k+29>0$$

이다. 따라서 k의 값의 범위는 $k>-\frac{29}{4}$이고, 이를 만족하는 정수 k의 최솟값은 -7이다.

답 -7

개념 바꾸기

유제 03-3

– 이차방정식의 판별식(p.166)
– 항등식의 성질 I(p.49)
+ 이차방정식의 짝수 판별식(p.167)

이차함수 $y=x^2+(a-6)x+2a+3$의 그래프와 직선 $y=ax+7$이 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

이차함수 $y=x^2+(a-6)x+2a+3$의 그래프가 직선 $y=ax+7$과 적어도 한 점에서 만나려면 한 점 또는 두 점에서 만나는 것과 같으므로 다음 이차방정식

$$x^2+(a-6)x+2a+3=ax+7 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x+(2a-4)=0 \quad \cdots ㉠$$

이 실근을 가져야 한다. 따라서 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$이어야 한다. 그러므로

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot(2a-4)\geq 0$$

에서 식을 정리하면 $a\leq\frac{13}{2}$이다.

답 $a\leq\frac{13}{2}$

06-2 이차함수의 최대, 최소

함수의 최대, 최소

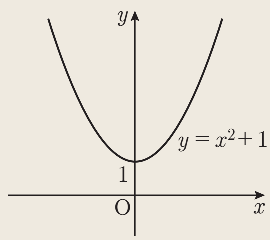


그림 6.6. 이차함수 $y=x^2+1$의 그래프

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프는 꼭짓점이 $(0,\ 1)$이고 아래로 볼록한 포물선으로 함숫값은 항상 1보다 크거나 같다. 즉, 이차함수 $y=x^2+1$은 $x=0$일 때 가장 작은 함숫값 1을 가진다. 이와 같이 어떤 함수의 모든 함숫값 중에서 가장 작은 값을 그 함수의 최솟값이라 하고, 반대로 가장 큰 값을 그 함수의 최댓값이라 한다.

정 의 상 6.6 **함수의 최대, 최소**

어떤 함수의 모든 함숫값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 **최댓값**이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 **최솟값**이라 한다.

이차함수의 최대, 최소

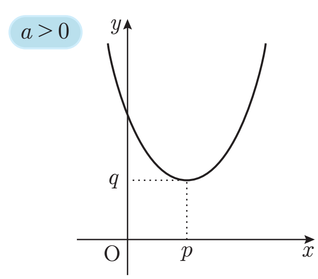
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은

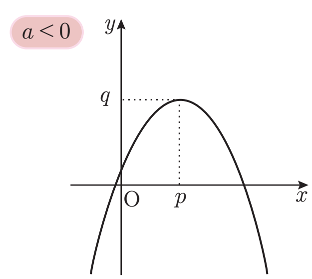
$$y=a(x-p)^2+q$$

의 꼴로 변형하여 구한다.

x의 값의 범위에 제한이 없을 때 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

- $a>0$**일 때** 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $x=p$에서 최솟값 q를 가진다. 그러나 x의 값이 한없이 커지거나 한없이 작아질 때는 함숫값이 한없이 커지므로 최댓값은 없다.
- $a<0$**일 때** 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 위로 볼록하므로 $x=p$에서 최댓값 q를 가진다. 그러나 x의 값이 한없이 커지거나 한없이 작아질 때는 함숫값이 한없이 작아지므로 최솟값은 없다.





포인트 상 6.7 **이차함수의 최대, 최소**

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

- $a>0$일 때 $x=p$에서 최솟값 q를 가지고 최댓값은 없다.
- $a<0$일 때 $x=p$에서 최댓값 q를 가지고 최솟값은 없다.

예 시

(1) 이차함수 $y=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 최솟값 1을 가지고 최댓값은 없다.
(2) 이차함수 $y=-x^2+2$는 $x=0$에서 최댓값 2를 가지고 최솟값은 없다.

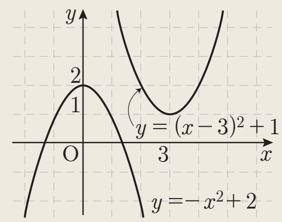


그림 6.7. 이차함수 $y=(x-3)^2+1$과 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프

보기 6.7 다음 물음에 답하시오.

(1) 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.
(2) 이차함수 $y=-x^2+6x+2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

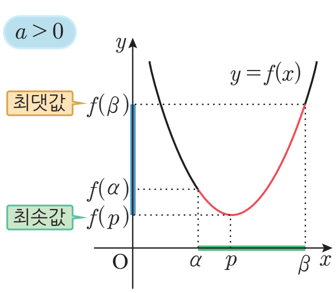
x의 값의 범위가 제한된 경우에 대하여 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구해보자.

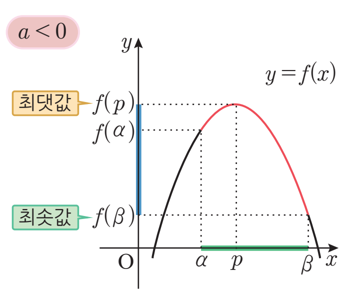
$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때는 주어진 범위에 이차함수의 꼭짓점의 x좌표가 포함되는지의 여부에 따라 나누어 생각할 수 있다.

이차함수의 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 포함되는 경우

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 꼭짓점의 x좌표 p가 주어진 범위 $\alpha\le x\le\beta$에 포함될 때, 즉 $\alpha\le p\le\beta$인 경우 a의 부호에 따라 다음과 같이 최댓값과 최솟값을 찾을 수 있다.

- **$a>0$일 때** $x=p$에서 최솟값 q를 가지고 $f(\alpha)$와 $f(\beta)$ 중 더 큰 값이 최댓값이다.
- **$a<0$일 때** $x=p$에서 최댓값 q를 가지고 $f(\alpha)$와 $f(\beta)$ 중 더 작은 값이 최솟값이다.



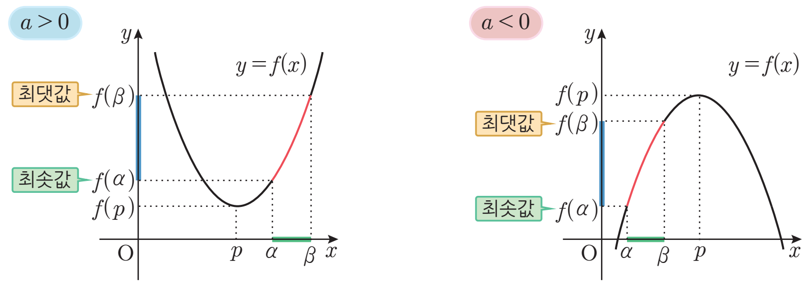


보기 정답

6.7 (1) 최댓값: 없다, 최솟값: -3
(2) 최댓값: 11, 최솟값: 없다

이차함수의 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 포함되지 않는 경우

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 꼭짓점의 x좌표 p가 주어진 범위 $\alpha \le x \le \beta$에 포함되지 않는 경우, 즉 $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$인 경우 $f(\alpha)$와 $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.



포인트 상 6.8 **제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소**

$\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

- 꼭짓점의 x좌표 p에 대하여 $\alpha \le p \le \beta$일 때
  - (i) $a>0$일 때 최솟값은 q이고 최댓값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$중 큰 값이다.
  - (ii) $a<0$일 때 최댓값은 q이고 최솟값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$중 작은 값이다.
- 꼭짓점의 x좌표 p에 대하여 $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
  $f(\alpha)$와 $f(\beta)$중에서 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.

예 시 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+7$에 대하여

(1) $0 \le x \le 3$에서 $x=2$일 때 최댓값은 7이고, $f(0)=3<f(3)=6$이므로 최솟값은 $f(0)=3$이다.

(2) $0 \le x \le 1$에서 $x=2$가 범위에 포함되지 않는다. $f(0)=3<f(1)=6$이므로 최댓값은 $f(1)=6$이고, 최솟값은 $f(0)=3$이다.

보기 6.8 다음 물음에 답하시오.

(1) $1 \le x \le 4$일 때, 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(2) $1 \le x \le 2$일 때, 이차함수 $y=-x^2+6x+2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

보기 정답

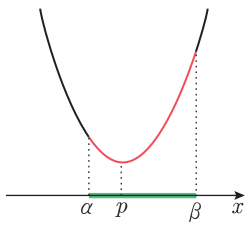
6.8 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -3
(2) 최댓값: 10, 최솟값: 7

한 걸음 더

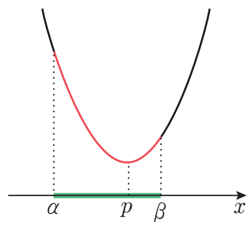
이차함수의 함숫값의 크기 비교

이차함수의 그래프는 축을 기준으로 좌우가 대칭인 꼴이다. 따라서 축에서 같은 거리만큼 떨어져 있으면 함숫값이 같다. 이 성질은 $\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값을 구할 때 유용하다.

- $a>0$**일 때** 축에서 함숫값이 가장 작고, 축에서 멀어질수록 함숫값이 커진다.

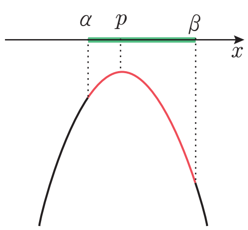


$x=\beta$ 일 때 최대

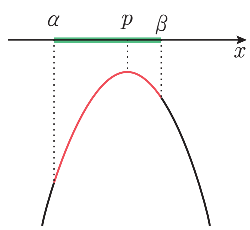


$x=\alpha$ 일 때 최대

- $a<0$**일 때** 축에서 함숫값이 가장 크고, 축에서 멀어질수록 함숫값이 작아진다.



$x=\beta$ 일 때 최소



$x=\alpha$ 일 때 최소

따라서 축과 양 끝 x좌표 사이의 거리를 비교하면 $f(\alpha)$와 $f(\beta)$의 대소 관계를 판단할 수 있다.

예 시

$-1 \le x \le 4$에서 이차함수 $f(x)=x^2-2x+2$의 최댓값과 최솟값을 구해보자. 먼저 이차함수 $f(x)$를 표준형으로 바꾸면

$$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

이므로 $x=1$이 축이다. 이때 축이 $-1 \le x \le 4$의 범위에 포함되므로 최솟값은 $f(1)=1$이다. 한편 축 $x=1$으로부터 $x=4$가 $x=-1$보다 멀리 떨어져 있으므로 $f(-1) \le f(4)$이다. 따라서 최댓값은 $f(4)=10$이다.

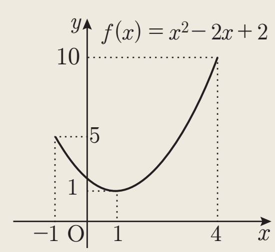


그림 6.8. 이차함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값

이차함수의 최대, 최소

예제 04 이차함수 $f(x)=-x^2-2ax+a-1$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, $g(a)$의 최솟값을 구하시오.

| 길잡이 | x의 값의 범위가 제한되지 않은 경우 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은 꼭짓점에서 나타난다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때에는 표준형

$$y=a(x-p)^2+q$$

으로 변형하여 꼭짓점을 찾으면 된다. 이때 $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값을, $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값을 가진다.

| 풀 이 |

1단계 이차함수를 표준형으로 변형하여 꼭짓점을 찾아 최댓값을 구한다.

이차함수 $f(x)$의 식을 표준형으로 변형하면

$$\begin{aligned} f(x)&=-(x^2+2ax+a^2-a^2)+(a-1) \\ &=-(x+a)^2+(a^2+a-1) \end{aligned}$$

이다. 이때, 이차함수 $f(x)$의 그래프는 x^2의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 모양이다. 따라서 $x=-a$일 때, 최댓값 a^2+a-1을 갖는다.

1 • 이차함수의 최대, 최소(p.203)
• 이차함수의 표준형(p.191)

2단계 $g(a)$도 이차식이고 a의 범위에 제한이 없으므로 표준형으로 변형하여 꼭짓점을 찾는다.

1단계에서 이차함수 $f(x)$는 $x=-a$일 때, 최댓값 a^2+a-1을 가지므로

$$g(a)=a^2+a-1$$

로 놓을 수 있다. $g(a)$ 또한 a에 관한 이차함수이므로 표준형으로 변형하면

$$g(a)=\left(a^2+a+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

이다. 이때, 이차함수 $g(a)$의 그래프는 a^2의 계수가 양수이므로 아래로 볼록한 모양이다. 따라서 $a=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $-\frac{5}{4}$를 가진다.

2 • 이차함수의 최대, 최소(p.203)
• 이차함수의 표준형(p.191)

| 정답 | $-\frac{5}{4}$

돌다리 두드리기

이차함수 $f(x)=x^2+4ax+4a-1$의 최솟값을 $g(a)$라 할 때, $g(a)$의 최댓값을 구하시오.

돌다리 두드리기
| 답 | 0

$f(x)=x^2+4ax+4a-1=(x+2a)^2-4a^2+4a-1$이므로 최솟값은

$$g(a)=-4a^2+4a-1=-(2a-1)^2$$

이다. 따라서 $g(a)$의 최댓값은 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$이다.

정답 및 풀이 p.522

개념 더하기

유제 04-1

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 4를 가진다. $f(2)$의 값을 구하시오.

이차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 최댓값 4를 가지므로

$$f(x)=a(x+1)^2+4 \quad \cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다. 이때, $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 ㉠에 대입하면

$$0=a\cdot 2^2+4=4a+4$$

에서 $a=-1$이다. ㉠에 $a=-1$을 대입하면

$$f(x)=-(x+1)^2+4$$

이므로 $f(2)=-9+4=-5$이다.

답 -5

개념 그대로

유제 04-2

이차함수 $y=-3x^2+12x-4k$의 최댓값과 이차함수 $y=4x^2+8x+k-4$의 최솟값이 서로 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오.

이차함수 $y=-3x^2+12x-4k$를 표준형으로 변형하면

$$y=-3(x^2-4x)-4k=-3(x-2)^2+(12-4k)$$

이므로 $x=2$일 때, 최댓값 $12-4k$를 갖는다.
또한, 이차함수 $y=4x^2+8x+k-4$를 표준형으로 변형하면

$$y=4(x^2+2x)+(k-4)=4(x+1)^2+(k-8)=0$$

이므로 $x=-1$일 때, 최솟값 $k-8$을 갖는다. 따라서

$$12-4k=k-8$$

이므로 $k=4$이다.

답 4

개념 더하기

유제 04-3

+ 인수분해를 통한 풀이(p.156)

이차함수 $y=ax^2+4ax+a^2-2$의 최솟값이 10일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 이차함수를 표준형으로 변형하면

$$\begin{aligned} y&=a(x^2+4x)+a^2-2 \\ &=a(x+2)^2+(a^2-2-4a) \end{aligned}$$

이다. 이 함수가 최솟값을 가지므로 $a>0$이고 $a^2-4a-2=10$이어야 한다. 즉,

$$a^2-4a-2-10=0 \quad \Rightarrow \quad (a-6)(a+2)=0$$

이므로 양수 a의 값은 6이다.

답 6

예제 05

$-2\le x\le 2$에서 이차함수 $y=-x^2+2ax$의 최댓값이 5일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

길잡이 **x의 범위가 제한되어 있는 경우, 범위에 꼭짓점의 x좌표의 포함 여부를 꼭 확인한 후 최댓값과 최솟값을 구한다.**

풀 이

1단계 이차함수의 식을 표준형으로 변형하여 꼭짓점을 구한다.

이차함수 $y=-x^2+2ax$를 표준형으로 변형하면

$$y=-(x-a)^2+a^2$$

이므로 위로 볼록한 형태이고 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ a^2)$이다.

1 • 이차함수의 표준형(p.191)

2단계 주어진 범위에 꼭짓점의 x좌표의 포함 여부에 따라 경우를 나누어 이차함수의 최댓값을 구한다.

2 • 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소(p.204)

주어진 범위 $-2\le x\le 2$에 꼭짓점 $(a,\ a^2)$의 x좌표 a의 포함 여부에 따라

$$a<-2,\quad -2\le a\le 2,\quad a>2$$

와 같이 세 가지 경우로 나누어 생각하자.

(i) $a<-2$일 때, 꼭짓점은 $x=-2$의 왼쪽에 있으므로 최댓값은 $x=-2$일 때

$$y=-(-2)^2+2a\cdot(-2)=-4-4a$$

이다. 따라서 $-4-4a=5$에서 $a=-\frac{9}{4}$이고 이 값은 조건 $a<-2$을 만족시킨다.

(ii) $-2\le a\le 2$일 때, 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 있으므로 최댓값은 $x=a$일 때

$$y=-(a^2)+2a^2=a^2$$

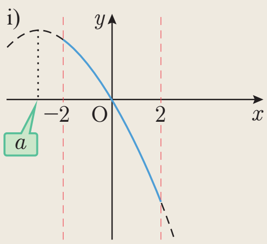
이다. 따라서 $a^2=5$에서 $a=\pm\sqrt{5}$이지만 이 값은 조건 $-2\le a\le 2$을 만족시키지 않는다.

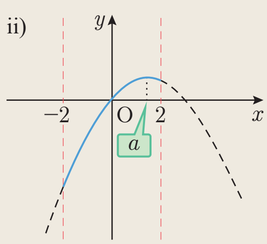
(iii) $a>2$일 때, 꼭짓점은 $x=2$의 오른쪽에 있으므로 최댓값은 $x=2$일 때

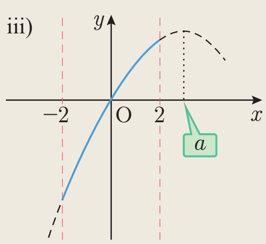
$$y=-2^2+2a\cdot 2=-4+4a$$

이다. 따라서 $-4+4a=5$에서 $a=\frac{9}{4}$이고 이 값은 조건 $a>2$을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 a의 값은 $-\frac{9}{4}$ 또는 $\frac{9}{4}$이다.

i)


ii)


iii)


정답 $-\frac{9}{4}$ 또는 $\frac{9}{4}$

돌다리 두드리기

$2\le x\le 9$에서 이차함수 $y=x^2-8x+k$의 최솟값이 16일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| 32

$y=x^2-8x+k=(x-4)^2+k-16$이므로 $x=4$일 때 최솟값 $k-16$을 가진다. 꼭짓점의 x좌표 4는 주어진 범위에 포함되므로 최솟값은 $x=4$일 때, $k-16=16$이다. 따라서 $k=32$이다.

정답 및 풀이 p.522

개념 그대로

유제 05-1

$1\le x\le 4$에서 이차함수 $y=-x^2+4x+a$의 최댓값은 2이다. 이 이차함수의 최솟값을 구하시오.

주어진 이차함수를 표준형으로 변형하면

$$y=-(x^2-4x)+a=-(x-2)^2+(a+4)$$

이다. 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 포함되므로 $x=2$일 때 최댓값 $a+4$를 가진다. 따라서 $a=-2$이다. 한편 최솟값은 축 $x=2$에서 먼 점인 $x=4$일 때이므로 $y=-(4-2)^2+2=-2$이다.

답 -2

개념 그대로

유제 05-2

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다. $0\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 15일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하시오.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 축은 $x=3$이고 꼭짓점의 x좌표가 3이다. 이차함수의 x^2의 계수가 1이므로

$$f(x)=(x-3)^2+k$$

라 하자. 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 포함되므로 축에서 가장 먼 점인 $x=0$에서 최댓값 15를 가지므로

$$f(0)=9+k=15 \quad \Rightarrow \quad k=6$$

이다. 따라서 구하는 이차함수 $f(x)$는

$$f(x)=(x-3)^2+6$$

이므로 이차함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 6을 가진다.

답 6

개념 그대로

유제 05-3

직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 점 A에서 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$를 따라 점 B까지 움직일 때, a^2+8b의 최솟값을 구하시오.

우선 $y=-\frac{1}{2}x+2$가 y축, x축과 만나는 점은 각각 $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(4, 0)$이므로 a의 범위는 $0\le a\le 4$이다. 또한 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

$$b=-\frac{1}{2}a+2$$

이다. 이것을 a^2+8b에 대입하고 표준형으로 변형하면

$$\begin{aligned} a^2+8b&=a^2+8\left(-\frac{1}{2}a+2\right) \\ &=a^2-4a+16=(a-2)^2+12 \end{aligned}$$

이다. 꼭짓점의 x좌표 $a=2$가 $0\le a\le 4$의 범위 내에 있으므로 최솟값은 12이다.

답 12

예제 06 길이가 60 cm인 철사로 직사각형을 만들 때, 직사각형의 대각선의 길이의 최솟값을 구하시오.

길잡이 문장으로 나타내어진 **최대, 최소의 활용문제는 문제에서 별도로 언급하지 않은 조건도 사용해야 한다.** 위 문제에서 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 둘레의 길이가 60 cm이므로 $y=30-x$의 관계가 성립한다. 이때 변의 길이는 항상 양수이므로

$$x>0,\ 30-x>0 \quad \Rightarrow \quad 0<x<30$$

이라는 조건을 고려하여야 한다.

풀 이

1단계 미지수를 이용하여 식을 세운다.

직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 둘레의 길이가 60 cm이므로 $y=30-x$의 관계가 성립한다. 직사각형의 대각선의 길이를 l cm라 하면 피타고라스 정리에 의해

$$l^2=x^2+(30-x)^2=2x^2-60x+900$$
$$=2(x-15)^2+450 \qquad \cdots ㉠$$

으로 놓을 수 있다.

2단계 범위를 확인한 후, 이차함수의 최솟값을 구한다.

이때 가로의 길이와 세로의 길이는 모두 양수이므로

$$x>0,\ 30-x>0 \quad \Rightarrow \quad 0<x<30$$

이고, 꼭짓점의 x좌표 $x=15$는 범위 내에 포함된다. 따라서 ㉠은 $x=15$일 때, l^2의 최솟값은 450이다. 따라서 구하는 대각선의 최솟값은

$$l=\sqrt{450}=15\sqrt{2}$$

에서 $15\sqrt{2}$ cm이다.

정답 $15\sqrt{2}$ cm

1 • 이차함수의 표준형(p.191)

2 • 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소(p.204)

돌다리 두드리기

길이가 20 cm인 철사로 직사각형을 만들 때, 직사각형의 대각선의 길이의 최솟값을 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| $5\sqrt{2}$ cm

직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 $(10-x)$ cm, 대각선의 길이를 l cm라 하면 $l^2=x^2+(10-x)^2=2(x-5)^2+50$으로 놓을 수 있다. $0<x<10$이므로 $x=5$일 때, l^2은 최솟값 50을 가지므로 대각선의 길이의 최솟값은 $l=5\sqrt{2}$이다.

정답 및 풀이 p.522

개념 그대로

유제 06-1

어떤 공연장에서 특별 음악회를 열 때 얻은 이익금 y(만 원)은 입장권 한 장의 가격 x(만 원)에 대한 이차함수 $y=-25x^2+400x-250$으로 정해진다고 한다. 이때 이익금이 최대가 되도록 하는 입장권 한 장의 가격과 이익금의 최댓값을 구하시오.

주어진 함수를 표준형으로 변형하면

$$y=-25x^2+400x-250$$
$$=-25(x-8)^2+1350$$

이다. 따라서 입장권을 8만 원으로 정할 때, 최대 이익금 1350만 원을 벌 수 있다.

답 입장권: 8만 원, 이익금: 1350만 원

개념 그대로

유제 06-2

지면으로부터 45 m의 높이에서 초속 40 m로 똑바로 위로 던질 때, t초 후의 공의 지면으로부터 높이를 y m라 하면 $y=-5t^2+40t+45$의 관계식이 성립한다. 이 공은 $t=a$일 때 최고 높이에 도달하고, $t=b$일 때 지면에 떨어진다. $a+b$의 값을 구하시오.

주어진 y에 관한 식은 t에 대한 이차함수이므로 표준형으로 변형하면

$$y=-5t^2+40t+45$$
$$=-5(t-4)^2+125$$

이다. 이 함수는 $t=4$일 때 y가 최댓값 125를 가진다. 즉, 공이 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은 4초이므로 $a=4$이다. 또한, 공이 지면에 떨어지는 경우는 높이가 0일 때이므로

$$0=-5t^2+40t+45$$
$$=-5(t+1)(t-9)$$

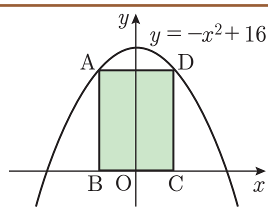
에서 $t=-1$ 또는 $t=9$인데, $t>0$이므로 $t=9$이다. 따라서 공은 9초 후에 지면에 도착함을 알 수 있다. 그러므로 $a=4,\ b=9$이고 구하는 값은 $a+b=13$이다.

답 13

개념 그대로

유제 06-3

오른쪽 그림의 직사각형 ABCD에서 두 점 B, C는 x축 위에 있고, 두 점 A, D는 이차함수 $y=-x^2+16$의 그래프 위에 있다. 이 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오. (단, 점 A는 제2사분면 위에 있다.)



점 C의 좌표를 $(a,\ 0)$으로 놓으면 점 D의 좌표는 $(a,\ -a^2+16)$이다. 이때 점 A가 제2사분면에 있으려면 $0<a<4$이어야 한다. 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 놓으면 가로 길이는 $2a$ 세로 길이는 $-a^2+16$이므로

$$l=2(-a^2+16)+2\cdot(2a)=-2a^2+4a+32$$
$$=-2(a-1)^2+34$$

이다. $a=1$은 범위 $0<a<4$에 포함되므로 이 함수는 $a=1$일 때 최댓값 34를 가진다. 따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

답 34

06-1 이차방정식과 이차함수 [1-5]

다음 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 표준형으로 구하시오.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -1)$이고 y절편이 -9일 때

(2) 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 두 점 $(2,\ 0)$, $(4,\ 8)$을 지날 때

(1) **이차함수의 그래프(p.191)**의 꼭짓점이 $(2,\ -1)$이므로 $y=a(x-2)^2-1$이다. 이 그래프는 $(0,\ -9)$를 지나므로 대입하면 $4a-1=-9$에서 $a=-2$이다. 따라서 구하려는 이차함수의 식은 $y=-2(x-2)^2-1$이다.

(2) **이차함수의 그래프(p.191)**의 축이 $x=1$이므로 $y=a(x-1)^2+b$라 놓을 수 있고, 이 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(4,\ 8)$을 지나므로 각각 대입하면

$$0=a(2-1)^2+b=a+b$$

$$8=a(4-1)^2+b=9a+b$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$이다. 따라서 이차함수의 식은 $y=(x-1)^2-1$이다.

답 (1) $y=-2(x-2)^2-1$
(2) $y=(x-1)^2-1$

06-2

이차함수 $y=x^2+(2-m)x+\dfrac{m^2}{4}$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

이차함수 $y=x^2+(2-m)x+\dfrac{m^2}{4}$의 **그래프(p.191)**가 x축과 만나지 않아야 하므로 **이차방정식(p.192)** $x^2+(2-m)x+\dfrac{m^2}{4}=0$의 **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$D=(2-m)^2-4\cdot\frac{m^2}{4}<0 \quad\Rightarrow\quad -4m+4<0$$

에서 $m>1$이다.

답 $m>1$

06-3

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 4)$이고 x축과 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 길이가 4일 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

주어진 이차함수는 **그래프(p.191)**의 꼭짓점이 $(-1,\ 4)$이므로

$$y=a(x+1)^2+4=ax^2+2ax+a+4$$

이고 **이차함수와 이차방정식의 관계(p.192)**에 의하여 방정식 $ax^2+2ax+a+4=0$의 두 근의 차가 4이다. 이때 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여

$$\frac{\sqrt{4a^2-4a(a+4)}}{|a|}=4$$

이므로 $a=-1$이다. 따라서 주어진 이차함수의 식은 $y=-x^2-2x+3$이고 $a=-1$, $b=-2$, $c=3$이다.

[다른 풀이]
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 **그래프(p.191)**의 축의 방정식이 $x=-1$이고, $\overline{AB}=4$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 -3과 1이다. **이차함수와 이차방정식의 관계(p.192)**를 이용하여 이차함수의 식을 $y=a(x+3)(x-1)$로 놓으면 이 이차함수의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로 $4=a(-1+3)(-1-1)$에서 $a=-1$이다. 그러므로 주어진 이차함수의 식은

$$y=-(x+3)(x-1)=-x^2-2x+3$$

이므로 $a=-1$, $b=-2$, $c=3$이다.

답 $a=-1$, $b=-2$, $c=3$

06-4

이차함수 $y=x^2+2ax+ak+k+b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 x축과 접할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 접하려면 이차방정식 $x^2+2ax+ak+k+b=0$이 **중근(p.192)**을 가져야 한다. 이 이차방정식의 **판별식(p.167)**을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(ak+k+b)=0 \quad\Rightarrow\quad a^2-b-k(a+1)=0$$

이다. 이 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 **항등식의 성질(p.49)**에 의하여

$$a^2-b=0,\quad a+1=0$$

이다. 두 식을 연립하면 $a=-1$, $b=1$이다. 따라서 $a+b=-1+1=0$이다.

답 0

06-5

두 이차함수 $y=x^2+ax-1$, $y=ax^2-x+1$의 그래프가 오직 한 점에서 만날 때, 실수 a의 값을 모두 구하시오.

두 이차함수가 한 점에서 만나므로

$$x^2+ax-1=ax^2-x+1$$

$$(a-1)x^2-(a+1)x+2=0 \qquad \cdots ㉠$$

에서 이차방정식 ㉠의 실근이 **두 이차함수의 교점의 x좌표가 된다.(p.192)**

(i) $a-1=0$, 즉 $a=1$이면

$$-2x+2=0$$

에서 $x=1$일 때, 두 이차함수가 만난다.

(ii) $a-1\neq0$이면 ㉠의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때, $D=0$이면 두 이차함수가 한 점에서 만난다. 따라서

$$D=(a+1)^2-8(a-1)$$

$$=a^2-6a+9=(a-3)^2=0$$

에서 $a=3$이면 ㉠에서 $2x^2-4x+2=0$이므로 $x=1$일 때, 두 이차함수가 만난다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 두 이차함수가 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값은 1 또는 3이다.

답 1 또는 3

06-6

함수 $y=x^2-2ax+2$의 그래프와 직선 $y=2b(x-a)$가 만나지 않도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

이차함수 $y=x^2-2ax+2$의 그래프와 직선 $y=2b(x-a)$가 만나지 않으려면 다음 **이차방정식(p.192)**

$$x^2-2ax+2=2b(x-a) \quad\Rightarrow\quad x^2-2(a+b)x+2ab+2=0$$

의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 방정식의 **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+b)\}^2-(2ab+2)<0$$

$$\Rightarrow\quad a^2+2ab+b^2-2ab-2<0$$

$$\Rightarrow\quad a^2+b^2<2 \qquad \cdots ㉠$$

이다. ㉠을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$$(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1)$$

의 5개이다.

답 5

06-7 이차함수의 최대, 최소 [7-12]

이차함수 $f(x)=-x^2+2kx-2k$의 최댓값이 10이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

이차함수 $f(x)$를 **표준형(p.191)**으로 변형하면

$$f(x)=-(x^2-2kx)-2k=-(x-k)^2+k^2-2k$$

이므로 $x=k$일 때, **최댓값(p.203)** k^2-2k를 갖는다. $k^2-2k=10$이 되어야 하므로

$$k^2-2k-10=0$$

에서 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 모든 k의 값의 곱은 -10이다.

답 -10

06-8

직선 $y=-2x+5$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 x^2+y^2의 최솟값을 구하시오.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$이 직선 $y=-2x+5$ 위를 움직이므로 식 x^2+y^2에 대입하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(-2x+5)^2\\&=x^2+4x^2-20x+25\\&=5x^2-20x+25\end{aligned}$$

이다. 이 식을 **이차함수의 표준형(p.191)**으로 변형하면

$$5x^2-20x+25=5(x^2-4x)+25=5(x-2)^2+5$$

이므로 x^2+y^2은 $x=2$일 때, 최솟값 5를 가진다.

답 5

06-9

이차함수 $f(x)=-2x^2+4ax+8a+6$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, $g(a)$의 최솟값을 구하시오.

이차함수 $f(x)$를 **표준형(p.191)**으로 변형하면

$$f(x)=-2(x^2-2ax)+8a+6=-2(x-a)^2+2a^2+8a+6$$

이므로 a에 대한 이차함수 $f(a)$의 **최댓값(p.203)**은 $g(a)=2a^2+8a+6$이다. $g(a)$는 a에 대한 이차함수의 식으로 볼 수 있으므로 $g(a)$를 표준형으로 변형하면

$$g(a)=2(a^2+4a)+6=2(a+2)^2-2$$

이므로 $g(a)$의 최솟값은 $a=-2$일 때, -2이다.

답 -2

06-10

그래프의 꼭짓점의 x좌표가 1인 이차함수 $y=2x^2-4bx+b$가 $2\le x\le a$에서 최댓값이 17일 때, 실수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

이차함수 $y=2x^2-4bx+b$를 **표준형(p.191)**으로 변형하면

$$y=2(x^2-2bx)+b=2(x-b)^2-2b^2+b$$

이고, 이 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 1이므로 $b=1$이다. 따라서 주어진 이차함수는

$$y=2(x-1)^2-1$$

이다. 또한 꼭짓점의 x좌표 1은 주어진 x의 값의 범위 $2\le x\le a$에 포함되지 않고, $a\ge 2$이므로 꼭짓점의 x좌표에서 가장 먼 $x=a$에서 주어진 이차함수가 **최댓값(p.204)**을 가진다. 즉, $x=a$일 때 최댓값이 17이므로

$$\begin{aligned}17&=2(a-1)^2-1=2(a^2-2a+1)-1\\&=2a^2-4a+1\end{aligned}$$

에서 **이차방정식(p.192)** $2a^2-4a-16=0$을 풀면

$$2a^2-4a-16=2(a^2-2a-8)=2(a-4)(a+2)=0$$

에서 $a=4$ 또는 $a=-2$이다. 이때 $a\ge 2$이므로 $a=4$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=4+1=5$이다.

답 5

06-11

$-2\le x\le 2$에서 이차함수 $y=3x^2+6x+k$의 최댓값이 12일 때, 최솟값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

주어진 이차함수의 식을 **표준형(p.191)**으로 변형하면

$$y=3(x^2+2x)+k=3(x+1)^2+k-3$$

이다. 주어진 범위는 $-2\le x\le 2$이므로 꼭짓점 $x=-1$을 포함한다. 따라서 $x=-1$에서 가장 먼 x의 값인 $x=2$에서 **최댓값(p.204)** 12를 가진다.

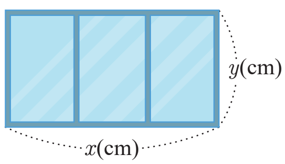
$$12=3(2+1)^2+k-3=24+k$$

에서 $k=-12$이다. $-2\le x\le 2$에서의 최솟값은 $x=-1$일 때, $k-3=-12-3=-15$이다.

답 -15

06-12

길이가 40cm인 조립식 나무틀을 모두 이용하여 오른쪽 그림과 같이 세 개의 직사각형 모양의 창문틀을 만들려고 한다. 창문의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, 창문틀의 두께는 생각하지 않는다.)



세 개의 직사각형의 둘레가 40이므로 $2x+4y=40$에서

$$y=-\frac{1}{2}x+10$$

이다. 따라서 전체 창문의 넓이는

$$xy=x\left(-\frac{1}{2}x+10\right)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$$

이다. 한편, $x>0$, $y>0$이고 $2x+4y=40$에서 $0<x<20$이다. 따라서 $x=10$일 때 전체 창문의 넓이가 **최대(p.204)**가 되고 그 넓이는 50이다.

답 50

06-1

유리수 a, b에 대하여 두 이차함수 $y=x^2+5x+4$와 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P의 x좌표가 $2-\sqrt{3}$일 때, $2a-5b$의 값을 구하시오.

이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 이차함수 $y=x^2+5x+4$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $-x^2+ax+b=x^2+5x+4$의 **두 실근**(p.192)이다. 이 이차방정식을 정리하면

$$2x^2-(a-5)x+4-b=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이때, a, b는 유리수이므로 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 **나머지 한 근**(p.173)은 $2+\sqrt{3}$이다. ㉠에서 **이차방정식의 근과 계수의 관계**(p.170)에 의하여

$$\frac{a-5}{2}=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4, \quad \frac{4-b}{2}=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$$

이다. 두 식을 연립하면 $a=13$, $b=20$이므로 구하는 값은

$$2a-5b=2\times13-5\times2=16$$

답 16

06-2

$x>0$일 때, 함수 $y=(x^2+x)^2-4(x^2+x)+5$가 $x=a$에서 최솟값 b를 가진다. $a+b$의 값을 구하시오.

$x>0$에서 $k=x^2+x$로 치환하면 $k>0$이다. 주어진 함수는

$$y=k^2-4k+5=(k-2)^2+1$$

이므로 $k>0$의 범위에서 $k=2$일 때, **최솟값**(p.204) 1을 갖는다. $k=2$를 $k=x^2+x$에 대입하면

$$2=x^2+x \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x+2)=0$$

에서 $x>0$이므로 $x=1$일 때, 최솟값 1을 갖는다. 따라서 $a+b=1+1=2$이다.

답 2

06-3

등식 $3x+4y=8$을 만족시키는 양의 실수 x, y에 대하여 $(\sqrt{17+3x}+\sqrt{11+4y})^2$의 최댓값을 구하시오.

주어진 식을 정리하면

$$(\sqrt{17+3x}+\sqrt{11+4y})^2 =28+3x+4y+2\sqrt{(17+3x)(11+4y)}$$

이고 $3x+4y=8$에서 $4y=8-3x$를 주어진 식에 대입하면

$$28+3x+4y+2\sqrt{(17+3x)(11+4y)} =36+2\sqrt{-9x^2+6x+323} =36+2\sqrt{-9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+324}$$

이다. 이때 $y>0$에서 $x<\frac{8}{3}$이므로 $0<x<\frac{8}{3}$에서 주어진 식은 $x=\frac{1}{3}$일 때 **최댓값**(p.204)

$$36+2\sqrt{324}=36+2\cdot18=72$$

을 갖는다.

답 72

06-4

함수 $f(x)=(k+2)x^2-2kx-1$의 그래프와 직선 $g(x)=2x-k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 최솟값을 구하시오.

(i) $k=-2$인 경우 $f(x)=4x-1$이고 $g(x)=2x+2$이므로 한 점에서 만난다. 따라서 $k\neq-2$이다.

(ii) $k\neq-2$인 경우 이차함수 $f(x)=(k+2)x^2-2kx-1$의 그래프와 직선 $g(x)=2x-k$가 **두 점에서 만나므로**(p.194) 방정식

$$(k+2)x^2-2kx-1=2x-k$$
$$\Rightarrow \quad (k+2)x^2-2(k+1)x+k-1=0$$

이 **서로 다른 두 실근**(p.192)을 가져야 한다. 이 방정식의 **판별식**(p.167) D는

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k-1)(k+2)=k+3>0$$

이므로 $k>-3$이다.

(i), (ii)에서 정수 k의 최솟값은 -1이다.

답 -1

정답 및 풀이 p.525

06-5

x에 대한 이차함수 $y=x^2-2mx+m^2-2m-6$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만날 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하시오. (단, m은 상수이다.)

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 **이차방정식(p.192)** $x^2-2mx+m^2-2m-6=0$의 **판별식(p.167)**을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(m^2-2m-6)=2m+6>0$$

에서 $m>-3$이다. **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여

$$\alpha+\beta=2m, \quad \alpha\beta=m^2-2m-6$$

이므로 이를 이용하면

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2m)^2-2(m^2-2m-6)$$
$$=2m^2+4m+12=2(m+1)^2+10$$

이다. 이때 $m>-3$이므로 $m=-1$에서 **최솟값(p.204)** 10을 갖는다.
따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 10이다.

답 10

06-6

x^2의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=kx$ 위에 있다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=kx+6$과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 α, β라 하자. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}$일 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a, ka)라 하면

$$f(x)=(x-a)^2+ka$$

라 놓을 수 있다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+6$이 만나는 **두 점(p.194)**의 x좌표 α, β는 방정식 $(x-a)^2+ka=kx+6$의 **두 근(p.192)**이다. 방정식을 정리하면

$$x^2-(2a+k)x+a^2+ka-6=0$$

에서 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여

$$\alpha+\beta=2a+k \qquad \cdots ㉠$$
$$\alpha\beta=a^2+ka-6 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}=a \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta=2a+1$$

이다. 이때 ㉠에서 $2a+1=2a+k$이므로 $k=1$이고 ㉡에서

$$\alpha\beta=a^2+ka-6=a^2+a-6$$

이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{(2a+1)^2-4(a^2+a-6)}=5$$

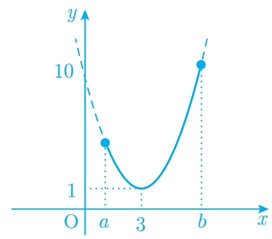
답 5

06-7

$a<3<b$인 실수 a, b에 대하여 $a\le x\le b$에서 정의된 함수 $y=x^2-6x+10$의 함숫값의 범위가 $a\le y\le b+1$일 때, 이를 만족하는 실수 b의 값을 모두 구하시오.

함수를 **표준형(p.191)**으로 변형하면

$$y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$$



이므로 꼭짓점이 $(3, 1)$이고 아래로 볼록한 함수이다. 꼭짓점의 x좌표가 x의 범위에 포함되므로 **최솟값(p.204)**은 1이다. 즉, $a\le y\le b+1$에서 $a=1$임을 알 수 있다.
$f(x)=x^2-6x+10$이라 놓자.
(i) $x=a$, 즉 $x=1$일 때 최댓값을 가지면 $f(1)=b+1$이 되어야 하므로 $5=b+1$에서 $b=4$이다. 이때, $f(4)=2$, $f(1)=5$이므로 y의 범위가 $1\le y\le 5$를 만족한다.
(ii) $x=b$일 때 최댓값을 가지면 $f(b)=b+1$이 되어야 하므로

$$b^2-6b+10=b+1 \quad \Rightarrow \quad b^2-7b+9=0$$

이 성립해야 한다. 방정식 $b^2-7b+9=0$의 근 b를 **근의 공식(p.157)**을 이용하여 구하면 $b=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$이고 $a<3<b$를 만족하는 값은 $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$이다. 이때,

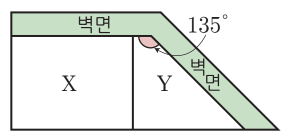
$$f\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)=\frac{9+\sqrt{13}}{2}=\frac{7+\sqrt{13}}{2}+1$$

이고, 이는 함수 $f(x)$의 범위의 조건인 $a\le y\le b+1$을 만족한다.
따라서 (i), (ii)에 의하여 주어진 범위를 모두 만족하는 실수 b의 값은 4 또는 $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$이다.

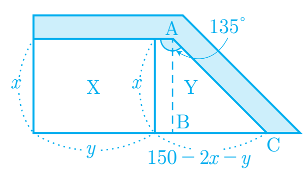
답 4 또는 $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$

06-8 교육청 기출

그림과 같이 $135°$로 꺾인 벽면이 있는 땅에 길이가 150 m인 철망으로 울타리를 설치하여 직사각형 모양의 농장 X와 사다리꼴 모양의 농장 Y를 만들려고 한다. 농장 X의 넓이가 농장 Y의 넓이의 2배일 때, 농장 Y의 넓이의 최댓값을 $S\,(\text{m}^2)$라 하자. S의 값을 구하시오. (단, 벽면에는 울타리를 설치하지 않고, 철망의 폭은 무시한다.)



직사각형의 세로와 가로의 길이를 각각 x, y라 하자. X의 넓이는 xy이고, 철망의 길이가 150이므로 사다리꼴의 아랫변의 길이는 $150-2x-y$이다. 점 A에서 사다리꼴의 아랫변에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overline{AB}=x$이고 $\angle CAB=45°$이므로 $\overline{BC}=x$이다. 이때 사다리꼴의 윗변의 길이는



$$(150-2x-y)-x=150-3x-y$$

이고 Y의 넓이는

$$\frac{1}{2}x\{(150-3x-y)+(150-2x-y)\}=\frac{1}{2}x(300-5x-2y)$$

이다. 이때 X의 넓이는 Y의 넓이의 2배이므로

$$xy=x(300-5x-2y) \quad \Rightarrow \quad y=100-\frac{5}{3}x$$

이다. 따라서 Y의 넓이는

$$(Y\text{의 넓이})=\frac{1}{2}xy=-\frac{5}{6}x^2+50x=-\frac{5}{6}(x-30)^2+750$$

이므로 $x=30$일 때, Y의 넓이의 **최댓값(p.204)** S는 750이다.

답 750

07 고차방정식

정의 & 포인트 확인

- 인수분해를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이
- 인수정리를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

- 삼차방정식의 근과 계수의 관계
- 세 수를 근으로 하는 삼차방정식
- 삼차방정식의 켤레근
- 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

07-1 삼차방정식과 사차방정식

고차방정식의 풀이

다항식 $P(x)$가 x에 대한 삼차식이면 $P(x)=0$을 x에 대한 삼차방정식, 다항식 $P(x)$가 x에 대한 사차식이면 $P(x)=0$을 x에 대한 사차방정식이라 한다. 예를 들어 등식 $x^3-1=0$은 삼차방정식이고, 등식 $x^4-4x^2-5=0$은 사차방정식이다.

고차방정식
x의 차수가 3보다 크거나 같은 다항식 $P(x)$에 대하여 방정식 $P(x)=0$을 x에 대한 고차방정식이라 한다.

이차방정식은 **이차방정식의 근의 공식****(p.157)**을 이용하여 근을 쉽게 구할 수 있다. 삼차방정식과 사차방정식도 근의 공식이 있지만 풀이법이 너무 복잡하여, 공식을 이용하여 근을 구하기 어렵다. 일반적으로 삼차 이상의 고차방정식은 인수분해를 이용하여 방정식을 푼다.

인수분해를 이용한 풀이

인수분해 공식을 이용한 풀이

$P(x)=0$의 꼴로 방정식을 정리한 후 **인수분해 공식 II****(p.82)**를 통해 $P(x)$를 인수분해한다.

두 다항식 A, B에 대하여 방정식 $AB=0$은

$$AB=0 \quad \Rightarrow \quad A=0 \text{ 또는 } B=0$$

임을 이용하여 푼다.

삼차방정식 $x^3-1=0$을 풀어보자. 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-1=0 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

이다. 근의 공식을 이용하여 방정식 $x^2+x+1=0$을 풀면 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로 삼차방정식 $x^3-1=0$의 근은 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

사차방정식 $x^4-16=0$을 풀어보자. 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4=0 \text{ 또는 } x^2+4=0$$

이다. 두 방정식 $x^2-4=0$과 $x^2+4=0$을 각각 풀면 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2i$이다.

치환을 이용한 풀이

공통인 부분이 있는 고차방정식의 경우 공통부분을 하나의 문자로 치환하여 인수분해한다. 치환한 문자에 대하여 방정식을 푼 다음 원래 공통부분을 치환한 문자에 대입하여 방정식을 푼다.

사차방정식 $(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24=0$을 풀어보자. $x^2-2x=X$라 하면

$$X^2-11X+24=(X-3)(X-8)=0 \quad \Rightarrow \quad X-3=0 \text{ 또는 } X-8=0$$

이다. 이제 $X=x^2-2x$를 다시 대입하면

(i) $X-3=0$일 때, $x^2-2x-3=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.
(ii) $X-8=0$일 때, $x^2-2x-8=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=4$이다.

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$이다.

복이차방정식의 풀이

$ax^4+bx^2+c=0$과 같이 짝수 차수만 있는 사차방정식을 복이차방정식이라 한다. **복이차식**(p.89)의 인수분해와 비슷한 방법으로 $x^2=X$로 치환하면 이 사차방정식은 X에 대한 이차방정식이 되어 조금 더 간단하게 풀 수 있다.

사차방정식 $x^4-5x^2+4=0$을 풀어보자. $x^2=X$로 치환하면

$$X^2-5X+4=(X-1)(X-4)=0 \quad \Rightarrow \quad X-1=0 \text{ 또는 } X-4=0$$

이다. 이제 $X=x^2$을 다시 대입하면

(i) $X-1=0$일 때, $x^2-1=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$이다.
(ii) $X-4=0$일 때, $x^2-4=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=2$이다.

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

한편, $x^2=X$로 치환해도 인수분해가 바로 되지 않는 경우도 있다. 이때에는 **치환을 이용한 인수분해**(p.89)에서 설명한 방법과 같이 이차항을 적당히 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 인수분해한다.

사차방정식 $x^4-7x^2+9=0$을 풀어보자. 이차항을 $-7x^2=-6x^2-x^2$으로 분리하면

$$\begin{aligned} x^4-7x^2+9 &= x^4-6x^2+9-x^2 \\ &= (x^2-3)^2-x^2 \\ &= (x^2-x-3)(x^2+x-3)=0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $x^2-x-3=0$ 또는 $x^2+x-3=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$이다.

사차방정식 $x^4-7x^2+9=0$에서 $x^2=X$로 치환하면 $X^2-7X+9=0$이지만 좌변이 유리수 계수를 갖는 일차식의 곱으로 인수분해 되지 않는다.

대칭형 고차방정식의 풀이

다음과 같이 계수의 모양이 대칭적으로 나타나는 사차방정식은 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하여 인수분해한다.

$$1\cdot x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$$

사차방정식 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$을 풀어보자. $x=0$을 대입하면 방정식이 성립하지 않으므로 사차방정식 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$은 $x=0$을 해로 갖지 않는다. 방정식의 양변을 x^2로 나누면

$$x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$
$$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

이므로 $x+\dfrac{1}{x}=X$라 하면

$$X^2+2X+1=(X+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad X+1=0$$

이다. 이제 $X=x+\dfrac{1}{x}$을 다시 대입하면

$$x+\frac{1}{x}+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+x+1=0$$

이므로 이차방정식의 근의 공식(p.157)에 의하여 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$(중근)이다.

중근(multiple root, 重根)
여러 개의 근이 같은 값을 가질 때, 그 근을 중근이라 한다. 중근 중에서 이중근은 서로 같은 2개의 근을 말하고, 삼중근은 서로 같은 3개의 근을 말한다. 복소수의 범위에서 이차방정식은 근이 2개이므로 중근은 이중근을 의미하지만, 삼차방정식은 근이 3개이므로 중근이 이중근인지 삼중근인지를 살펴보아야 한다.

포인트 상 7.1 **인수분해를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이**

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후, 다항식 $P(x)$를 인수분해한다.

- 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한다.
- 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.
- 식을 적절히 변형하여 인수분해한다.

보기 7.1 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-4x=0$　　(2) $x^4-1=0$

(3) $(x^2-x)^2-4(x^2-x)=0$　　(4) $x^4-3x^2-4=0$

(5) $x^4+5x^2+9=0$　　(6) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$

보기 정답

7.1 (1) $x=0$ 또는 $x=\pm2$
(2) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$
(3) $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$
(4) $x=\pm2$ 또는 $x=\pm i$
(5) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$
(6) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$(중근)

인수정리를 이용한 풀이

삼차방정식과 사차방정식이 인수분해 공식을 이용하여 간단히 인수분해가 되지 않는 경우 **인수정리를 이용하여 인수분해(p.91)**한다.

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후, $P(\alpha)=0$이면 일차식 $x-\alpha$가 다항식 $P(x)$의 인수임을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다. 이때, **조립제법(p.63)**을 이용하면 $P(x)$의 각 항의 계수만으로 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나눌 때의 몫을 쉽게 구할 수 있다.

사차방정식 $x^4+3x^3-7x^2-15x+18=0$을 풀어보자.

$$P(x)=x^4+3x^3-7x^2-15x+18$$

로 놓으면

$$P(1)=1+3-7-15+18=0$$

$$P(2)=16+24-28-30+18=0$$

이므로 $x-1$, $x-2$는 $P(x)$의 인수이다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 3 & -7 & -15 & 18 \\
 & & 1 & 4 & -3 & -18 \\
\hline
2 & 1 & 4 & -3 & -18 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 12 & 18 & \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} &
\end{array}$$

이므로, $P(x)$는

$$\begin{aligned}P(x)&=x^4+3x^3-7x^2-15x+18\\&=(x-1)(x-2)(x^2+6x+9)\\&=(x-1)(x-2)(x+3)^2\end{aligned}$$

과 같이 인수분해된다. 따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$(중근)이다.

포인트 상 7.2 **인수정리를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이**

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후, $P(\alpha)=0$을 만족하는 α의 값을 찾고 조립제법을 이용하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$로 인수분해한다.

보기 7.2 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+2x^2-x-2=0$ (2) $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$

보기 정답

7.2 (1) $x=-2$ 또는 $x=\pm1$
(2) $x=-3$ 또는 $x=\pm1$ 또는 $x=2$

삼차방정식과 사차방정식의 풀이

예제 01 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+3x^2+3x+1=0$　　(2) $x^3-8=0$

(3) $x^3-7x+6=0$　　(4) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$

길잡이 방정식은 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후 $P(x)$를 인수분해하여 해를 구한다. 인수분해는 공식을 이용할 수도 있지만, 간단히 공식으로 인수분해가 되지 않는 경우에는 인수정리를 이용하여 인수분해한다. 인수정리에서 $P(\alpha)=0$인 α는

$$\pm\frac{\text{상수항의 양의 약수}}{\text{최고차항 계수의 양의 약수}}$$

중에서 절댓값이 작은 정수부터 대입하여 찾는다.

- 인수정리를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.221)
- 인수분해를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.220)
- 이차방정식의 근의 공식(p.157)

풀 이

(1) $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3=0$이므로 $x=-1$(삼중근)이다.

(2) 인수분해 공식을 이용하여 주어진 방정식의 좌변의 식을 인수분해하면

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

이므로 $x=2$ 또는 $x^2+2x+4=0$이다. 이때 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 해는 근의 공식을 이용하면 $x=-1\pm\sqrt{3}i$이므로 주어진 방정식의 근은 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$이다.

(3) $P(x)=x^3-7x+6$이라 하자. $P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이고 조립제법을 이용하면

1	1	0	-7	6
		1	1	-6
	1	1	-6	0

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x^2+x-6)\\&=(x-1)(x-2)(x+3)\end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 방정식의 해는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$이다.

(4) $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$라 하자.
$P(-1)=0$, $P(2)=0$이므로 $x+1$, $x-2$는 $P(x)$의 인수이고 조립제법을 이용하면

-1	1	-2	-7	8	12
		-1	3	4	-12
2	1	-3	-4	12	0
		2	-2	-12	
	1	-1	-6	0	

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x-2)(x^2-x-6)\\&=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

정답 (1) $x=-1$(삼중근)　(2) $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$
(3) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$
(4) $x=-1$ 또는 $x=\pm2$ 또는 $x=3$

돌다리 두드리기

다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-6x^2+12x-8=0$　　(2) $x^3+27=0$

(3) $x^3-2x^2-x+2=0$　　(4) $x^4+x^3-3x^2-x+2=0$

돌다리 두드리기

|답| (1) $x=2$(삼중근)

(2) $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=\pm1$ 또는 $x=2$

(4) $x=1$(중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

(1) $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3=0$이므로 $x=2$(삼중근)

(2) $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$
이므로 $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)$
$=(x-1)(x+1)(x-2)=0$
이므로 $x=\pm1$ 또는 $x=2$

(4) $x^4+x^3-3x^2-x+2=(x-1)^2(x^2+3x+2)$
$=(x-1)^2(x+1)(x+2)=0$
이므로 $x=1$(중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

정답 및 풀이 p.526

개념 그대로

유제 01-1

다음 방정식을 푸시오.

(1) $8x^3-36x^2+54x-27=0$ (2) $64x^3+1=0$

(3) $4x^3-4x^2-x+1=0$ (4) $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$

(1) 주어진 방정식의 좌변의 식을 인수분해하면

$$8x^3-36x^2+54x-27=(2x-3)^3=0$$

이므로 $x=\frac{3}{2}$(삼중근)이다.

(2) 주어진 방정식의 좌변의 식을 인수분해하면

$$64x^3+1=(4x+1)(16x^2-4x+1)=0$$

이므로 $4x+1=0$ 또는 $16x^2-4x+1=0$이다. 따라서 $x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{8}$이다.

(3) $P(x)=4x^3-4x^2-x+1$라 하자. $P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이고 조립제법을 이용하면

1	4	-4	-1	1
		4	0	-1
	4	0	-1	0

$$P(x)=(x-1)(4x^2-1)=(x-1)(2x+1)(2x-1)$$

이다. 따라서 주어진 방정식의 해는 $x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$이다.

(4) $P(x)=2x^4+3x^3-4x^2-3x+2$라 하자. $P(-1)=0$, $P(1)=0$이므로 $x+1$, $x-1$은 $P(x)$의 인수이고 조립제법을 이용하면

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x+2)(2x-1)$$

이다. 따라서 주어진 방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=\pm1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다.

답 (1) $x=\frac{3}{2}$(삼중근) (2) $x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{8}$

(3) $x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(4) $x=-2$ 또는 $x=\pm1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

개념 바꾸기

- 이차방정식의 근의 공식(p.157)
+ 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

유제 01-2

x에 대한 삼차방정식 $x^3-kx+4=0$의 한 근이 2이고 나머지 두 근을 α, β라 할 때, $k(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

2가 방정식 $x^3-kx+4=0$의 근이므로 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$$8-2k+4=0 \quad\Rightarrow\quad k=6$$

이다. $P(x)=x^3-6x+4$라 하면 $P(2)=0$이므로 $x-2$는 $P(x)$의 인수이고 조립제법을 이용하면

2	1	0	-6	4
		2	4	-4
	1	2	-2	0

$$P(x)=(x-2)(x^2+2x-2)$$

이다. 따라서 $x=2$가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+2x-2=0$을 만족하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$이다. 그러므로 구하는 값은 $k(\alpha+\beta)=6\cdot(-2)=-12$이다.

답 -12

개념 바꾸기

- 이차방정식의 근의 공식(p.157)
+ 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
+ 이차방정식의 판별식(p.166)

유제 01-3

사차방정식 $x^4+2x^3+3x^2+2x-8=0$의 실근의 합을 a, 허근의 합을 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.

$P(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x-8$이라 하자. $P(-2)=0$, $P(1)=0$이므로 $x+2$, $x-1$은 $P(x)$의 인수이고 조립제법을 이용하면

-2	1	2	3	2	-8
		-2	0	-6	8
1	1	0	3	-4	0
		1	1	4	
	1	1	4	0	

$$P(x)=(x+2)(x-1)(x^2+x+4)$$

이다. 이때 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot4=-15<0$$

이므로 이차방정식 $x^2+x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 합은 $b=-1$이다. 또한 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 실근의 합은 $a=-1$이다. 따라서 구하는 값은 $ab=(-1)\cdot(-1)=1$이다.

답 1

예제 02

다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x^2-2x)^2+2x^2-4x=0$ (2) $x(x+1)(x+2)(x+3)=3$

길잡이 고차방정식의 경우 **공통인 부분이 있으면 공통부분을 하나의 문자로 치환**하여 치환한 문자에 대하여 방정식을 먼저 풀고, 공통부분을 치환한 문자에 대입하여 한번 더 방정식을 푼다.

풀 이

(1) $x^2-2x=X$로 치환하면

$$X^2+2X=0 \quad \Rightarrow \quad X(X+2)=0$$

이므로 $X=-2$ 또는 $X=0$이다.

(i) $X=-2$일 때, $X=x^2-2x$를 대입하여 정리하면 $x^2-2x+2=0$이고, 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=1\pm i$이다.

(ii) $X=0$일 때, $X=x^2-2x$를 대입하여 정리하면 $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=2$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=1\pm i$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$이다.

(2) 주어진 방정식에서 공통부분이 생기도록 전개하면

$$x(x+3)(x+1)(x+2)=3 \quad \Rightarrow \quad (x^2+3x)(x^2+3x+2)=3$$

이다. 공통부분 $x^2+3x=X$로 치환하면

$$X(X+2)=3 \quad \Rightarrow \quad X^2+2X-3=0 \quad \Rightarrow \quad (X+3)(X-1)=0$$

이므로 $X=-3$ 또는 $X=1$이다.

(i) $X=-3$일 때, $X=x^2+3x$를 대입하여 정리하면 $x^2+3x+3=0$이고, 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

(ii) $X=1$일 때, $X=x^2+3x$를 대입하여 정리하면 $x^2+3x-1=0$이고, 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$이다.

정답 (1) $x=1\pm i$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

- 인수분해를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.220)
- 이차방정식의 근의 공식(p.157)

돌다리 두드리기

다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x^2+x)^2+(x^2+x)=6$ (2) $x(x-1)(x+1)(x+2)=8$

(1) $X=x^2+x$라 하면 $(X+3)(X-2)=0$이므로
$(x^2+x+3)(x^2+x-2)=(x+2)(x-1)(x^2+x+3)=0$
이다. 따라서 $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(2) $X=x^2+x$라 하면
$(X-2)X-8=(X-4)(X+2)=(x^2+x-4)(x^2+x+2)=0$
이므로 $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

돌다리 두드리기

|답| (1) $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$
(2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

정답 및 풀이 p.527

개념 그대로

유제 02-1

다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x^2+2x+3)(x^2+2x+4)=6$ (2) $x(x+2)(x-2)(x-4)+15=0$

(1) $x^2+2x=X$로 치환하고 주어진 방정식을 정리하면

$$(X+3)(X+4)=6 \quad \Rightarrow \quad (X+1)(X+6)=0$$

이므로 $X=-1$ 또는 $X=-6$이다.

(i) $X=-1$일 때, $x^2+2x=-1$을 정리하면 $(x+1)^2=0$이므로 $x=-1$(중근)이다.

(ii) $X=-6$일 때, $x^2+2x=-6$을 정리하면 $x^2+2x+6=0$이므로 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=-1\pm\sqrt{5}i$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-1$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}i$이다.

(2) 주어진 방정식에서 공통부분이 생기도록 전개하면

$$x(x-2)(x+2)(x-4)+15=0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2-2x)(x^2-2x-8)+15=0$$

이다. $x^2-2x=X$로 치환하면

$$X(X-8)+15=0 \quad \Rightarrow \quad (X-3)(X-5)=0$$

이므로 $X=3$ 또는 $X=5$이다.

(i) $X=3$일 때, $x^2-2x=3$을 정리하면 이므로 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

(ii) $X=5$일 때, $x^2-2x=5$를 정리하면 $x^2-2x-5=0$이므로 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=1\pm\sqrt{6}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$이다.

답 (1) $x=-1$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}i$
(2) $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

개념 줄이기

유제 02-2

— 이차방정식의 근의 공식(p.157)

사차방정식 $(x^2-x-1)^2-6(x^2-x)+11=0$을 푸시오.

$x^2-x=X$로 치환하고 주어진 방정식을 정리하면

$$(X-1)^2-6X+11=0 \quad \Rightarrow \quad (X-2)(X-6)=0$$

이므로 $X=2$ 또는 $X=6$이다.

(i) $X=2$일 때, $x^2-x=2$를 정리하면 $(x+1)(x-2)=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.

(ii) $X=6$일 때, $x^2-x=6$을 정리하면 $(x+2)(x-3)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=\pm2$ 또는 $x=3$이다.

답 $x=-1$ 또는 $x=\pm2$ 또는 $x=3$

개념 바꾸기

유제 02-3

— 이차방정식의 근의 공식(p.157)
+ 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
+ 이차방정식의 판별식(p.166)

사차방정식 $(x^2-2x+1)(x^2-2x+2)-6=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

$x^2-2x=X$로 치환하고 주어진 방정식을 정리하면

$$(X+1)(X+2)-6=0 \quad \Rightarrow \quad (X+4)(X-1)=0$$

이므로 $X=-4$ 또는 $X=1$이다.

(i) $X=-4$일 때, $x^2-2x=-4$를 정리하면 $x^2-2x+4=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\cdot4<0$$

이므로 이차방정식 $x^2-2x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때, $x^2-2x=1$을 정리하면 $x^2-2x-1=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-1\cdot(-1)=2>0$$

이므로 이차방정식 $x^2-2x-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 허근은 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \quad \alpha\beta=4$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-4$$

답 -4

복이차식과 대칭형

예제 03

다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4-12x^2+4=0$ (2) $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$

길잡이 $ax^4+bx^2+c=0$의 꼴의 사차방정식은 $x^2=X$로 치환하여 인수분해하거나 이차항을 적절히 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 인수분해한다. 계수의 모양이 대칭적으로 나타나는 사차방정식은 양변을 x^2으로 나누고 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 인수분해한다.

풀 이

(1) 이차항을 적절히 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 변형한 뒤 이차식의 곱으로 바꾸면

$$(x^4+4x^2+4)-16x^2=(x^2+2)^2-16x^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-4x+2)(x^2+4x+2)=0$$

이다. 이차방정식의 근의 공식을 사용하여 각각의 해를 구하면

(i) $x^2-4x+2=0$에서 $x=2\pm\sqrt{2}$

(ii) $x^2+4x+2=0$에서 $x=-2\pm\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{2}$이다.

(2) $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누고 정리하면

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

이고 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2+2X-3=(X+3)(X-1)=0$이므로

$X=-3$ 또는 $X=1$이다.

(i) $X=-3$일 때, $x+\frac{1}{x}=-3$의 양변에 x를 곱하고 정리하면 $x^2+3x+1=0$이므로 이 이차방정식의 해는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$이다.

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하고 정리하면 $x^2-x+1=0$이므로 이 이차방정식의 해는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

정답 (1) $x=2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{2}$
(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

- 인수분해를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.220)
- 이차방정식의 근의 공식(p.157)

돌다리 두드리기

다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4+7x^2+16=0$ (2) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$

(1) $x^4+7x^2+16=(x^2+4)^2-x^2$
$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)=0$
이므로 $x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(2) 양변을 x^2으로 나누고 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2-7X+12=(X-3)(X-4)=(x^2-3x+1)(x^2-4x+1)=0$ 이다. 따라서 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

돌다리 두드리기

|답| (1) $x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(2) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

정답 및 풀이 p.528

개념 그대로

유제 03-1

다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4+3x^2+2=0$ (2) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

(1) $x^2=X$로 치환하면 주어진 방정식은

$$X^2+3X+2=0 \quad \Rightarrow \quad (X+1)(X+2)=0$$

에서 $X=-1$ 또는 $X=-2$이다. 따라서 $x^2=-1$ 또는 $x^2=-2$이므로 주어진 방정식의 해는 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$이다.

(2) $x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

이고 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 정리하면

$$(X^2-2)-5X+8=0 \quad \Rightarrow \quad (X-2)(X-3)=0$$

에서 $X=2$ 또는 $X=3$이다.

(i) $X=2$일 때, $x+\frac{1}{x}=2$의 양변에 x를 곱하고 정리하면 이므로 이 이차방정식의 해는 $x=1$(중근)이다.

(ii) $X=3$일 때, $x+\frac{1}{x}=3$의 양변에 x를 곱하고 정리하면 $x^2-3x+1=0$ 이므로 이 이차방정식의 해는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=1$(중근) 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이다.

답 (1) $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

(2) $x=1$(중근) 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

개념 더하기

+ 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
+ 이차방정식의 판별식(p.166)

유제 03-2

사차방정식 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$의 실근의 합을 구하시오.

$x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

에서 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하면 주어진 방정식은

$$X^2+3X-4=0 \quad \Rightarrow \quad (X-1)(X+4)=0$$

에서 $X=1$ 또는 $X=-4$이다.

(i) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하고 정리하면 $x^2-x+1=0$이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 가진다.

(ii) $X=-4$일 때, $x^2+\frac{1}{x}=-4$의 양변에 x를 곱하고 정리하면 $x^2+4x+1=0$ 이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=3>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가지고 이때 두 실근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 -4이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 -4이다.

답 -4

개념 더하기

+ 이차방정식의 켤레근(p.173)
+ 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
+ 이차방정식의 판별식(p.166)

유제 03-3

사차방정식 $x^4+3x^2+4=0$의 해를 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$라 할 때, $(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\overline{\beta})$의 값을 구하시오. (단 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

주어진 방정식에서 좌변의 이차항을 $3x^2=4x^2-x^2$으로 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 만들면

$$(x^4+4x^2+4)-x^2=(x^2+2)^2-x^2=0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2-x+2)(x^2+x+2)=0$$

에서 $x^2-x+2=0$ 또는 $x^2+x+2=0$이다.

(i) 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot 2=-7<0$$

이므로 두 허근을 갖는다. 한 허근을 α라 하면 $\overline{\alpha}$가 다른 하나의 근이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\overline{\alpha}=1$이다.

(ii) 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$$

이므로 두 허근을 갖는다. 한 허근을 β라 하면 $\overline{\beta}$가 다른 하나의 근이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\beta+\overline{\beta}=-1$이다.

(i), (ii)에서 구하는 값은

$$(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\overline{\beta})=1\cdot(-1)=-1$$

답 -1

07-2 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)처럼 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (a, b, c, d는 상수)의 세 근을 각각 α, β, γ라 할 때, 세 근 α, β, γ와 계수 a, b, c, d 사이의 관계를 알아보자. $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 두면, $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$, $P(\gamma)=0$이므로 다항식 $P(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$를 각각 인수로 가진다. 따라서 다항식 $P(x)$는

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

와 같이 인수분해된다. 이제 양변을 a로 나누고 우변을 전개하면

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

이고, 이 식은 x에 대한 항등식이므로 **계수비교법(p.52)**으로부터

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

가 성립한다.

x에 대한 방정식

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

이 삼차방정식이라 하면 삼차항의 계수가 $a\neq0$인 것을 가정한다.

포인트 상 7.3 **삼차방정식의 근과 계수의 관계**

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

가 성립한다.

예 시

(1) 삼차방정식 $x^3-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{1}=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{0}{1}=0,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{(-1)}{1}=1$$

이다. 삼차방정식 $x^3-1=0$의 세 근을 직접 구하면 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 이므로 값을 각각 계산해도 결과는 동일하다.

(2) 삼차방정식 $2x^3-x^2+3x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{2},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{2}{2}=-1$$

의 관계가 성립한다.

보기 7.3 삼차방정식 $x^3-3x+2x+7=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$ (2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (3) $\alpha\beta\gamma$

보기 정답

7.3 (1) 3 (2) 2 (3) -7

세 수를 근으로 하는 삼차방정식

두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)과 같이 주어진 세 수를 근으로 하는 삼차방정식을 구해보자.

x^3의 계수가 1이고 세 수 α, β, γ를 근으로 하는 삼차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

으로 나타낼 수 있다. 이 방정식의 좌변을 전개한 뒤 x에 대하여 내림차순으로 정리(p.16)하면

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

이다. 즉, 세 수 α, β, γ를 근으로 하는 삼차방정식은 세 근의 합 $\alpha+\beta+\gamma$, 두 근끼리의 곱의 합 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, 세 근의 곱 $\alpha\beta\gamma$로 표현할 수 있다.

포인트 상 7.4 **세 수를 근으로 하는 삼차방정식**

x^3의 계수가 1이고 세 수 α, β, γ를 근으로 하는 삼차방정식은 다음과 같다.

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

예시

x^3의 계수가 1이고 세 수 -1, 1, 2를 근으로 하는 삼차방정식은

$$\begin{aligned} \text{세 근의 합: } & \alpha+\beta+\gamma=(-1)+1+2=2 \\ \text{두 근끼리의 곱의 합: } & \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(-1)\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-1)=-1 \\ \text{세 근의 곱: } & \alpha\beta\gamma=(-1)\cdot1\cdot2=-2 \end{aligned}$$

이므로 $x^3-2x^2-x+2=0$이다.

보기 7.4 x^3의 계수가 1이고 다음 세 수를 근으로 하는 삼차방정식을 구하시오.

(1) $1,\ 2,\ -3$ (2) $1,\ 2+i,\ 2-i$

삼차방정식의 켤레근

이차방정식의 켤레근(p.173)과 같이 삼차방정식의 켤레근 성질을 알아보자.

유리수 계수를 가지는 삼차방정식

유리수 a, b, c, d에 대하여 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 근이 $\alpha=p+q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)라 하자. 그러면 삼차식 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여 $P(\alpha)=0$이므로

보기 정답

7.4 (1) $x^3-7x+6=0$
(2) $x^3-5x^2+9x-5=0$

$$P(\alpha)=a(p+q\sqrt{m})^3+b(p+q\sqrt{m})^2+c(p+q\sqrt{m})+d$$
$$=\{a(p^3+3mpq^2)+b(p^2+mq^2)+cp+d\}+\sqrt{m}\{a(3p^2q+mq^3)+2bpq+cq\}=0$$

이다. 무리수가 서로 같을 조건(p.125)에 의하여

$$a(p^3+3mpq^2)+b(p^2+mq^2)+cp+d=0, \quad a(3p^2q+mq^3)+2bpq+cq=0 \quad \cdots (7.2.1)$$

이다. 이제 $\beta=p-q\sqrt{m}$이라 하고 $P(\beta)$의 값을 구해보면

$$P(\beta)=a(p-q\sqrt{m})^3+b(p-q\sqrt{m})^3+c(p-q\sqrt{m})+d$$
$$=\{a(p^3+3mpq^2)+b(p^2+mq^2)+cp+d\}-\sqrt{m}\{a(3p^2q+mq^3)+2bpq+cq\}$$

이고, (7.2.1)에 의하여 $P(\beta)=0$이다. 따라서 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $\alpha=p+q\sqrt{m}$이면 $\beta=p-q\sqrt{m}$도 근이다.

실수 계수를 가지는 삼차방정식

실수 a, b, c, d에 대하여 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 근이 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하자. 그러면 삼차식 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여 $P(\alpha)=0$이므로

$$P(\alpha)=a(p+qi)^3+b(p+qi)^2+c(p+qi)+d$$
$$=\{a(p^3-3pq^2)+b\{p^2-q^2\}+cp+d\}+\{a(3p^2q-q^3)+2bpq+cq\}i=0$$

이다. 복소수가 서로 같을 조건(p.125)에 의하여

$$a(p^3-3pq^2)+b\{p^2-q^2\}+cp+d=0, \quad a(3p^2q-q^3)+2bpq+cq=0 \qquad \cdots (7.2.2)$$

이다. 이제 $\beta=p-qi$라 하고 $P(\beta)$의 값을 구해보면

$$P(\alpha)=a(p+qi)^3+b(p+qi)^2+c(p+qi)+d$$
$$=\{a(p^3-3pq^2)+b\{p^2-q^2\}+cp+d\}-\{a(3p^2q-q^3)+2bpq+cq\}i=0$$

이고, (7.2.2)에 의하여 $P(\beta)=0$이다. 따라서 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $\alpha=p+qi$이면 $\beta=p-qi$도 근이다.

포인트 상 7.5 **삼차방정식의 켤레근**

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

- a, b, c, d가 유리수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)
- a, b, c, d가 실수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$이다.)

보기 7.5 다음 물음에 답하시오.

(1) 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $1-\sqrt{5}$, -2일 때, 나머지 한 근을 구하시오. (단, a, b, c는 유리수이다.)

(2) 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $2+i$, 1일 때, 나머지 한 근을 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.)

방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

삼차방정식 $x^3=1$의 우변을 이항하면 $x^3-1=0$이고 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

이다. 이때 이차방정식 $x^2+x+1=0$은 서로 다른 두 허근(p.166)을 가지므로 삼차방정식 $x^3=1$은 하나의 실근과 서로 다른 두 허근을 가진다. 두 허근 중 하나를 ω라 하면 방정식의 계수가 모두 실수이므로 나머지 한 허근은 켤레근(p.173)의 성질에 따라 $\overline{\omega}$이다. 삼차방정식 $x^3=1$의 두 허근 ω, $\overline{\omega}$에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

- ω와 $\overline{\omega}$는 $x^3=1$과 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $x=\omega$를 대입하면
$$\omega^3=\overline{\omega}^3=1, \qquad \omega^2+\omega+1=\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$$
- 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)에 의하여
$$\omega+\overline{\omega}=-1, \qquad \omega\overline{\omega}=1$$
- 방정식 $x^3=1$에 $x=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않는다. 따라서 $\omega\neq0$, $\overline{\omega}\neq0$이고 $\omega^3=1$의 양변을 ω로 나누면 $\omega^2=\dfrac{1}{\omega}$이다.
마찬가지로 $\overline{\omega}^3=1$의 양변을 $\overline{\omega}$로 나누면 $\overline{\omega}^2=\dfrac{1}{\overline{\omega}}$이다. 또한 $\omega\overline{\omega}=1$임을 이용하면
$$\omega^2=\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}, \qquad \overline{\omega}^2=\omega=\frac{1}{\overline{\omega}}$$

포인트 상 7.6 **방정식 $x^3=1$의 허근의 성질**

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 다음이 성립한다.

- $\omega^3=\overline{\omega}^3=1$, $\quad \omega^2+\omega+1=\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
- $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\quad \omega\overline{\omega}=1$
- $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$, $\quad \overline{\omega}^2=\omega=\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

예시 방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω에 대하여 $\overline{\omega}+\dfrac{1}{\omega}=\omega^2+\omega=-1$이다.

ω는 24번째 그리스 소문자로 '오메가'로 읽는다. 대문자는 Ω라 쓴다.

방정식 $x^3=-1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 하면 다음이 성립한다.

- $\omega^3=\overline{\omega}^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$
- $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$
- $\omega^2=-\overline{\omega}=-\dfrac{1}{\omega}$, $\overline{\omega}^2=-\omega=-\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

보기 정답

7.5 (1) $1+\sqrt{5}$ (2) $2-i$

예제 04

x에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2-(2k+3)x+2k=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

길잡이 삼차식 ax^3+bx^2+cx+d가 $a(x-\alpha)(x^2+px+q)$의 꼴로 인수분해될 때, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$가 중근을 가지는 경우는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

- **이차방정식 $x^2+px+q=0$의 근이 중근**
- **이차방정식 $x^2+px+q=0$의 서로 다른 두 근 중 한 근이 α**

풀 이

1단계 (일차식)$\times$(이차식)$=0$의 꼴로 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3+2x^2-(2k+3)x+2k$라 두면

$$f(1)=1+2-2k-3+2k=0$$

이므로 $x-1$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -2k-3 & 2k \\ & & 1 & 3 & -2k \\ \hline & 1 & 3 & -2k & \boxed{0} \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+3x-2k)$$

이고 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+3x-2k)=0$이다.

2단계 이차방정식이 중근을 가질 경우와 $x=1$이 중근이 되는 경우에 대하여 k의 값을 구한다.

(i) 이차방정식 $x^2+3x-2k=0$이 중근을 가질 때, 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\cdot(-2k)=0 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{9}{8}$$

이다. 이때 $x=1$은 이차방정식 $x^2+3x+\frac{9}{4}=0$의 근이 아니다.

(ii) $x=1$이 이차방정식 $x^2+3x-2k=0$의 한 근일 때, $x=1$을 대입하면

$$4-2k=0 \quad \Rightarrow \quad k=2$$

이다. 이때 이차방정식 $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)=0$의 다른 한 근은 $x=-4$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은 $\left(-\frac{9}{8}\right)\cdot 2=-\frac{9}{4}$이다.

정답 $-\frac{9}{4}$

🗐1 • 인수정리를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.221)

🗐2 • 이차방정식의 판별식(p.166)

돌다리 두드리기

x에 대한 삼차방정식 $x^3-(k+1)x+k=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| $k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=2$

$(x-1)(x^2+x-k)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -k-1 & k \\ & & 1 & 1 & -k \\ \hline & 1 & 1 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

(i) 이차방정식 $x^2+x-k=0$이 중근을 가질 때,

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-k)=0 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{1}{4}$$

(ii) $x=1$이 이차방정식 $x^2+x-k=0$의 한 근일 때, $x=1$을 대입하면

$$2-k=0 \quad \Rightarrow \quad k=2$$

(i), (ii)에 의하여 $k=\frac{1}{4}$ 또는 $k=2$이다.

개념 줄이기

유제 04-1

– 인수정리를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.221)

x에 대한 삼차방정식 $(x-2)(x^2-2x+k)=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

(i) 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 중근을 가질 때, 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot k=0 \quad \Rightarrow \quad k=1$$

이다. 이때 $x=2$는 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 근이 아니다.

(ii) $x=2$가 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 한 근일 때, 이 이차방정식에 $x=2$를 대입하면

$$2^2-2\cdot 2+k=0 \quad \Rightarrow \quad k=0$$

이다. 이때 이차방정식 $x^2-2x=x(x-2)=0$의 다른 한 근은 $x=0$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $1+0=1$이다.

답 1

개념 그대로

유제 04-2

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(2k-1)x^2-(2k-4)x-4=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

$f(x)=x^3+(2k-1)x^2-(2k-4)x-4$라 하자. $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이고, 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2k-1 & -2k+4 & -4 \\ & & 1 & 2k & 4 \\ \hline & 1 & 2k & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

이므로 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+2kx+4)=0$이다.

(i) 이차방정식 $x^2+2kx+4=0$이 중근을 가질 때, 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-1\cdot(4)=0 \quad \Rightarrow \quad k=\pm 2$$

이다. 이때 $x=1$은 이차방정식 $x^2\pm 4x+4=0$의 근이 아니다.

(ii) $x=1$이 이차방정식 $x^2+2kx+4=0$의 한 근일 때, 이 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$$1^2+2k+4=0 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{5}{2}$$

이다. 이때 이차방정식 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$의 다른 한 근은 $x=4$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 k는 ± 2 또는 $-\frac{5}{2}$이므로 모든 실수 k의 값의 곱은 $-2\cdot 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=10$이다.

답 10

개념 그대로

유제 04-3

x에 대한 삼차방정식 $x^3+kx-k-1=0$의 실근이 한 개뿐일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^3+kx-k-1$이라 하자. $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이고, 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & k & -k-1 \\ & & 1 & 1 & k+1 \\ \hline & 1 & 1 & k+1 & \boxed{0} \end{array}$$

이므로 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x+k+1)=0$이다. 실근이 $x=1$ 한 개뿐이려면 이차방정식 $x^2+x+k+1=0$이 허근을 가지거나 $x=1$을 중근으로 가져야한다.

(i) 이차방정식 $x^2+x+k+1=0$이 허근을 가질 때, 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot 1\cdot(k+1)<0 \quad \Rightarrow \quad k>-\frac{3}{4}$$

(ii) $x=1$이 이차방정식 $x^2+x+k+1=0$의 중근일 때, 이 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$$1+1+k+1=0 \quad \Rightarrow \quad k=-3$$

이다. $k=-3$일 때 이차방정식은 $x^2+x-2=0$이고 근은 $x=1$ 또는 $x=-2$이다. 따라서 이차방정식 $x^2+x+k+1=0$은 $x=1$을 중근으로 가지지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는 $k>-\frac{3}{4}$이다.

답 $k>-\frac{3}{4}$

삼차방정식의 근과 계수의 관계

예제 05 삼차방정식 $x^3-2x^2+4x+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

길잡이 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 실근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이다. 이 관계식과 곱셈 공식의 변형을 이용하면 세 근에 관한 다양한 식의 값을 계산할 수 있다.

- 삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)
- 곱셈 공식의 변형 II(p.23)

풀 이

공통 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\quad \alpha\beta\gamma=-3 \qquad \cdots ㉠$$

(1) 식을 통분하여 정리하고 ㉠의 값을 대입하면

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{4}{3}$$

(2) 곱셈 공식의 변형을 통하여 식을 변형하고 ㉠의 값을 대입하면

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2^2-2\cdot4=-4$$

(3) 주어진 식을 전개하면

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$$

이다. ㉠의 값을 대입하면

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=(-3)+4+2+1=4$$

[다른 풀이]

세 근이 α, β, γ이므로 삼차식 x^3-2x^2+4x+3은 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 인수분해된다. 즉

$$x^3-2x^2+4x+3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이고, 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-1-2-4+3=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma) \quad\Rightarrow\quad 4=(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$$

이므로 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=4$이다.

정답 (1) $-\dfrac{4}{3}$　(2) -4　(3) 4

돌다리 두드리기

삼차방정식 $x^3+6x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

돌다리 두드리기

|답| (1) -2　(2) 40　(3) -6

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-6,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\quad \alpha\beta\gamma=1$$

(1) $\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-2}{1}=-2$

(2) $(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(-6)^2-2(-2)=40$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=1+(-2)+(-6)+1=-6$

개념 더하기

유제 05-1

+ 곱셈 공식의 변형 II(p.23)

삼차방정식 $2x^3+6x^2+8x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ (2) $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}$ (3) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-3,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\quad \alpha\beta\gamma=\frac{3}{2} \qquad \cdots ㉠$$

임을 이용하여 각각의 식을 계산하면 다음과 같다.

(1) 주어진 식을 전개하고 ㉠의 값을 대입하면

$$(\text{주어진 식})=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$
$$=8-4\cdot(-3)+2\cdot4-\frac{3}{2}=\frac{53}{2}$$

[다른 풀이]
$2x^3+6x^2+8x-3=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이므로 $x=2$를 대입하면

$$2\cdot8+6\cdot4+8\cdot2-3=2(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$$
$$\Rightarrow\quad (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=\frac{53}{2}$$

(2) 주어진 식을 통분하여 정리하고 ㉠의 값을 대입하면

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{\frac{3}{2}}=-2$$

(3) 곱셈 공식의 변형을 통하여 식을 변형하고 ㉠의 값을 대입하면

$$(\text{주어진 식})=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)$$
$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=4^2-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot(-3)=25$$

답 (1) $\dfrac{53}{2}$ (2) -2 (3) 25

개념 줄이기

유제 05-2

− 곱셈 공식의 변형 II(p.23)

삼차방정식 $x^3+6x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가 $1:2:3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha+3\alpha=6\alpha=-6 \qquad \cdots ㉠$$
$$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot3\alpha+3\alpha\cdot\alpha=11\alpha^2=a \qquad \cdots ㉡$$
$$\alpha\cdot2\alpha\cdot3\alpha=6\alpha^3=-b \qquad \cdots ㉢$$

이다. ㉠에서 $\alpha=-1$이고, 이 값을 ㉡, ㉢에 대입하면 $a=11$, $b=6$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=11+6=17$이다.

답 17

개념 줄이기

유제 05-3

− 곱셈 공식의 변형 II(p.23)

삼차방정식 $x^3-x^2+4x+k=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=2$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\quad \alpha\beta\gamma=-k \qquad \cdots ㉠$$

이고, $\alpha+\beta+\gamma=1$이므로

$$\alpha+\beta=1-\gamma,\quad \beta+\gamma=1-\alpha,\quad \gamma+\alpha=1-\beta$$

이다. 이를 이용하여 주어진 식을 변형하고, ㉠의 값을 대입하면

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$
$$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$$
$$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$
$$=1-1+4-(-k)=4+k=2$$

이므로 구하는 값은 $k=-2$이다.

답 -2

세 수를 근으로 하는 삼차방정식

예제 06 삼차방정식 $x^3-x^2+3x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

| 길잡이 | x^3의 계수가 1이고 세 수 α, β, γ를 근으로 하는 삼차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

이다.

| 풀 이 |

1단계 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구한다.

삼차방정식 $x^3-x^2+3x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\quad \alpha\beta\gamma=-2$$

2단계 1단계에서 얻은 값을 이용하여 새로운 삼차방정식의 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱을 구한다.

$\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하는 삼차방정식에서

$$(\text{세 근의 합})=(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(\alpha+\beta+\gamma)+3=4$$

$$\begin{aligned}(\text{두 근의 곱의 합})&=(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{세 근의 곱})&=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\\&=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1\\&=-2+3+1+1=3\end{aligned}$$

3단계 2단계에서 얻은 값을 이용하여 삼차방정식을 구한다.

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-4x^2+8x-3=0$$

| 정답 | $x^3-4x^2+8x-3=0$

1 • 삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)

2 • 삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)

3 • 세 수를 근으로 하는 삼차방정식(p.229)

돌다리 두드리기

삼차방정식 $x^3+2x^2+4x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $x^3+5x^2+11x+4=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=3$ 이므로

(i) $(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=-5$

(ii) $(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)(\gamma-1)+(\gamma-1)(\alpha-1)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3=4-2\cdot(-2)+3=11$

(iii) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$
$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$
$=3-4-2-1=-4$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3+5x^2+11x+4=0$

정답 및 풀이 p.530

개념 그대로

유제 06-1

삼차방정식 $x^3-4x^2-3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때 상수 a, b, c의 곱 abc의 값을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=4,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\quad \alpha\beta\gamma=-1$$

이다. $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식에 대하여

$$(\text{세 근의 합})=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{-1}=3$$

$$(\text{두 근의 곱의 합})=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4}{-1}=-4$$

$$(\text{세 근의 곱})=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-1}=-1$$

이므로 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-3x^2-4x+1=0$$

이다. 따라서 $a=-3$, $b=-4$, $c=1$이고 $abc=12$이다.

답 12

개념 그대로

유제 06-2

삼차방정식 $x^3+4x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\quad \alpha\beta\gamma=-2$$

이다. $\alpha+\beta+\gamma=0$이므로 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$는 각각 $-\gamma$, $-\alpha$, $-\beta$이고 이를 세 근으로 하는 삼차방정식에 대하여

$$(\text{세 근의 합})=(-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

$$(\text{두 근의 곱의 합})=(-\gamma)\cdot(-\alpha)+(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)$$
$$=\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta\gamma=4$$

$$(\text{세 근의 곱})=(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=2$$

이므로 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3+4x-2=0$$

답 $x^3+4x-2=0$

개념 그대로

유제 06-3

삼차방정식 $x^3-x^2+2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 2인 삼차방정식을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\quad \alpha\beta\gamma=1$$

이다. $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하는 삼차방정식에 대하여

$$(\text{세 근의 합})=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$$

$$(\text{두 근의 곱의 합})=\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=1$$

$$(\text{세 근의 곱})=(\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha)=(\alpha\beta\gamma)^2=1$$

이므로 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-2x^2+x-1=0$$

이다. 따라서 x^3의 계수가 2인 삼차방정식은 위 식의 양변에 2를 곱하면

$$2x^3-4x^2+2x-2=0$$

답 $2x^3-4x^2+2x-2=0$

삼차방정식의 켤레근

예제 07 x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+6=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 한 근이 $\sqrt{2}-2i$일 때, 실수 a, b의 값을 각각 구하시오.

| 길잡이 | 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

- **a, b, c, d가 유리수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)**
- **a, b, c, d가 실수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$이다.)**

| 풀 이 |

(1) a, b가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 $1-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-6 \quad \Rightarrow \quad \alpha=6$$

이다. 즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, 6이므로

$$-a=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})+6=8$$

$$b=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+6(1-\sqrt{2})+6(1+\sqrt{2})=11$$

에서 $a=-8$, $b=11$이다.

(2) a, b가 모두 실수이고 한 근이 $\sqrt{2}-2i$이므로 $\sqrt{2}+2i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha(\sqrt{2}+2i)(\sqrt{2}-2i)=-6 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-1$$

이다. 즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 $\sqrt{2}-2i$, $\sqrt{2}+2i$, -1이므로

$$-a=(\sqrt{2}-2i)+(\sqrt{2}+2i)-1=2\sqrt{2}-1$$

$$b=(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)+(-1)\cdot(\sqrt{2}-2i)+(-1)\cdot(\sqrt{2}+2i)=6-2\sqrt{2}$$

에서 $a=1-2\sqrt{2}$, $b=6-2\sqrt{2}$이다.

| 정답 | (1) $a=-8$, $b=11$ (2) $a=1-2\sqrt{2}$, $b=6-2\sqrt{2}$

- 삼차방정식의 켤레근(p.230)
- 삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)

돌다리 두드리기

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 한 근이 $2+\sqrt{5}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하시오.

(2) 한 근이 $1+\sqrt{3}i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | (1) $a=-8$, $b=15$

(2) $a=-1$, $b=2$

(1) 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-4$ 이므로 나머지 한 근 $\alpha=4$이다.

$a=-\{(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})+4\}=-8$

$b=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+4(2+\sqrt{5})+4(2-\sqrt{5})=15$

(2) 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$ 이므로 나머지 한 근 $\alpha=-1$이다.

$a=-\{(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+(-1)\}=-1$

$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(-1)(1+\sqrt{3}i)+(-1)(1-\sqrt{3}i)$
$=2$

정답 및 풀이 p.531

개념 그대로

유제 07-1

x에 대한 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\sqrt{3}-2$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

a, b가 모두 유리수이고 한 근이 $-2+\sqrt{3}$이므로 $-2-\sqrt{3}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(-2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})=-1 \quad \Rightarrow \quad \alpha=3$$

이다. 즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$, 3이므로 구하는 a, b는

$$a=(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})+3(-2+\sqrt{3})+3(-2-\sqrt{3})=-11$$

$$b=-3(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})=-3$$

이므로 $a+b=-14$이다.

답 -14

개념 더하기

유제 07-2

+ 복소수의 곱셈(p.128)

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+x+b=0$의 한 근이 $(2+i)^2$일 때, 두 실수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$(2+i)^2$을 전개하면 $(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$이다. 삼차방정식의 한 근이 $3+4i$이고 a, b가 모두 실수이므로 $3-4i$도 한 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+4i)(3-4i)+\alpha(3+4i)+\alpha(3-4i)=1 \quad \Rightarrow \quad 25+6\alpha=1$$

이므로 $\alpha=-4$이다. 즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 $3+4i$, $3-4i$, -4이므로 구하는 a, b의 값은

$$a=-\{(3+4i)+(3-4i)+(-4)\}=-2$$

$$b=-(-4)\cdot(3+4i)(3-4i)=100$$

답 $a=-2$, $b=100$

개념 그대로

유제 07-3

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 1, $4-2i$일 때, 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

삼차방정식의 한 근이 $4-2i$이고 a, b, c가 모두 실수이므로 $4+2i$도 한 근이다. 즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 $4-2i$, $4+2i$, 1이므로 a, b, c는

$$a=-\{(4-2i)+(4+2i)+1\}=-9$$

$$b=(4-2i)(4+2i)+1\cdot(4-2i)+1\cdot(4+2i)=28$$

$$c=-1\cdot(4-2i)(4+2i)=-20$$

에서 $a+b+c=-9+28-20=-1$이다.

답 -1

예제 08

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^9$　　(2) $(2+3\omega)(2+3\overline{\omega})$

길잡이 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면

$$\omega^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=0,\quad \omega+\overline{\omega}=-1,\quad \omega\overline{\omega}=1$$

이 성립한다.

풀 이

(1) $x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 즉,

$$\omega^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=0 \qquad \cdots ㉠$$

이 성립한다. 주어진 식에서 항을 세 개씩 묶으면

$$\begin{aligned}&1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^9\\&=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^3\end{aligned}$$

이고, ㉠의 값을 대입하면

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^9=0+1\cdot0+1\cdot0+1^3=1$$

(2) 실수 계수의 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이고 구하는 값은

$$\begin{aligned}(2+3\omega)(2+3\overline{\omega})&=4+6(\omega+\overline{\omega})+9\omega\overline{\omega}\\&=4+6\cdot(-1)+9=7\end{aligned}$$

정답 (1) 1　(2) 7

- 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질(p.231)
- 삼차방정식의 켤레근(p.230)
- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

돌다리 두드리기

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{20}$　　(2) $(1+2\omega)(1+2\overline{\omega})$

돌다리 두드리기

|답| (1) 0　(2) 3

(1) $(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{18}(1+\omega+\omega^2)=0$
(2) $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$이므로 $1+2(\omega+\overline{\omega})+4\omega\overline{\omega}=3$

정답 및 풀이 p.531

개념 줄이기

유제 08-1

- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $1+\omega^2+\omega^7+\omega^{12}$　　(2) $\dfrac{1}{2-\omega}+\dfrac{1}{2-\overline{\omega}}$

$x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이 성립한다.

(1) 주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned}1+\omega^2+\omega^7+\omega^{12}&=1+\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+(\omega^3)^4\\&=1+\omega^2+\omega+1=0+1=1\end{aligned}$$

(2) 실수 계수 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이고 구하는 값은

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-\omega}+\frac{1}{2-\overline{\omega}}&=\frac{2-\overline{\omega}+2-\omega}{(2-\omega)(2-\overline{\omega})}\\&=\frac{4-(\omega+\overline{\omega})}{4-2(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) $\dfrac{5}{7}$

개념 줄이기

유제 08-2

- 삼차방정식의 켤레근(p.230)
- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{2018}+\omega^{2019}+\omega^{2020}$의 값을 구하시오.

$x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이 성립한다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(\omega^3)^{672}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{673}+(\omega^3)^{673}\cdot\omega\\&=\omega^2+1+\omega=0\end{aligned}$$

답 0

개념 줄이기

유제 08-3

- 삼차방정식의 켤레근(p.230)
- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, $1-\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}-\dfrac{1}{\omega^3}$의 값을 구하시오.

$x^3=-1$에서 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이 성립한다. 따라서 구하는 값은

$$(\text{주어진 식})=1-\frac{\omega^2-\omega+1}{\omega^3}=1-\frac{0}{-1}=1$$

답 1

07-1 삼차방정식과 사차방정식 [1-6]

다음 방정식을 푸시오.

(1) $3x^3-8x^2+3x+2=0$ (2) $4x^4-17x^2+16=0$

(1) $f(x)=3x^3-8x^2+3x+2$라 할 때, $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. **조립제법(p.63)**을 이용하여 $f(x)$를 **인수분해(p.91)**하면
$f(x)=(x-1)(x-2)(3x+1)=0$이므로 **삼차방정식(p.221)**의 해는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$이다.

(2) 주어진 **방정식(p.220)**에서 $-17x^2=-16x^2-x^2$로 분리하여 인수분해하면

$$4x^4-17x^2+16=4x^4-16x^2+16-x^2$$
$$=\{2(x^2-2)\}^2-x^2=(2x^2+x-4)(2x^2-x-4)=0$$

이므로 $2x^2+x-4=0$에서 $x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$이고 $2x^2-x-4=0$에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$이다.

답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$
(2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$

07-2

방정식 $2x^4+5x^3+7x^2+5x+2=0$을 푸시오.

$x\neq0$이므로 주어진 **방정식(p.220)**의 양변에 $\frac{1}{x^2}$을 곱하면

$$2x^2+5x+7+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

이고 $x+\frac{1}{x}=X$로 **치환(p.220)** 하고 정리하면

$$2x^2+5x+7+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}=2X^2+5X+3$$
$$=(2X+3)(X+1)=\left(2x+3+\frac{2}{x}\right)\left(x+1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}(2x^2+3x+2)(x^2+x+1)=0$$

이다. $2x^2+3x+2=0$에서 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}$이고 $x^2+x+1=0$에서 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

답 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

07-3

x에 대한 삼차방정식 $x^3-4x^2+(2a+3)x-2a=0$이 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^3-4x^2+(2a+3)x-2a=0$으로 놓으면 $f(1)=0$이다. **조립제법(p.63)**을 이용하여 $f(x)$를 **인수분해(p.221)**하면

1	1	-4	$2a+3$	$-2a$
		1	-3	$2a$
	1	-3	$2a$	0

이므로 $f(x)=(x-1)(x^2-3x+2a)$이다. 주어진 삼차방정식이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2-3x+2a=0$이 **허근(p.157)**을 가져야 하므로 이 이차방정식의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때,

$$D=3^2-4\cdot(2a)<0 \quad\Rightarrow\quad a>\frac{9}{8}$$

답 $a>\frac{9}{8}$

07-4

사차방정식 $(x^2-4x-1)(x^2-4x+3)=12$의 모든 실근의 곱을 구하시오.

주어진 **사차방정식(p.220)**을 정리하면

$$(x^2-4x-1)(x^2-4x+3)-12=0$$

이고 좌변에서 $x^2-4x=X$로 치환하여 정리하면

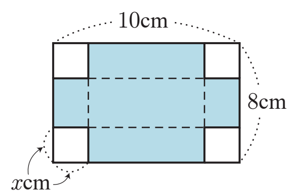
$$(x^2-4x-1)(x^2-4x+3)-12=(X-1)(X+3)-12$$
$$=X^2+2X-15=(X-3)(X+5)$$
$$=(x^2-4x-3)(x^2-4x+5)=0$$

이다. 이때 **이차방정식의 판별식(p.166)**에 의하여 이차방정식 $x^2-4x-3=0$은 서로 다른 두 실근, $x^2-4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다. 따라서 주어진 사차방정식의 모든 실근의 곱은 이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 두 실근의 곱과 같고 그 값은 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 -3이다.

답 -3

07-5

가로의 길이가 10 cm, 세로의 길이가 8 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형을 잘라 낸 후 점선을 따라 접어서 부피가 48 cm^{3}인 상자를 만들려고 한다. x의 값을 구하시오.



상자의 가로의 길이는 $(10-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(8-2x)$ cm, 높이는 x cm이다. 이때 부피가 48 cm^{3}이므로

$$(10-2x)(8-2x)x=48 \quad\Rightarrow\quad x^3-9x^2+20x-12=0$$

이다. $f(x)=x^3-9x^2+20x-12$라 할 때, $f(1)=0$이므로 **조립제법(p.63)**을 이용하여 $f(x)$를 **인수분해(p.221)**하면

$$f(x)=(x-1)(x^2-8x+12)=(x-1)(x-2)(x-6)$$

이므로 **삼차방정식(p.221)** $f(x)=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$이다. 그런데 $x=6$일 때, $10-2x<0$, $8-2x<0$이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 조건을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

답 $x=1$ 또는 $x=2$

07-6

x에 대한 삼차방정식 $x^3-(a+1)x+a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

주어진 **삼차방정식(p.220)**의 좌변을 인수분해하면

$$x^3-(a+1)x+a=(x-1)(x^2+x-a)=0$$

으로 나타낼 수 있다.

(i) 중근이 $x=1$이면 $1+1-a=0 \Rightarrow a=2$

(ii) $x^2+x-a=0$이 중근을 가지려면 이 **이차방정식의 판별식(p.166)**을 D라 할 때

$$D=1^2+4a=0 \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$이다.

답 $\frac{7}{4}$

07-7 삼차방정식의 근과 계수의 관계 [7-12]

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+7bx-12b=0$의 두 근이 -4, 2일 때, 나머지 한 근을 k라 하자. $(a-b)k$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

주어진 삼차방정식의 세 근이 -4, 2, k이므로 **삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)**에 의하여

$$k-4+2=-a \Rightarrow k+a=2 \quad \cdots ㉠$$
$$-4k+2k-8=7b \Rightarrow 2k+7b=-8 \quad \cdots ㉡$$
$$-8k=12b \Rightarrow 2k+3b=0 \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉡, ㉢를 연립하여 풀면 $k=3$, $b=-2$이고 이를 ㉠에 대입하면 $a=-1$이다.
따라서 구하는 값은 $(a-b)k=(-1+2)\cdot 3=3$이다.

답 3

07-8

삼차방정식 $2x^3+12x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가 $1:2:3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

세 근의 비가 $1:2:3$이므로 세 근을 α, 2α, 3α $(\alpha\neq 0)$라 하자. **삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)**에 의하여

$$\alpha+2\alpha+3\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=-1$$
$$\alpha\cdot 2\alpha+2\alpha\cdot 3\alpha+3\alpha\cdot\alpha=\frac{a}{2} \Rightarrow a=22\alpha^2=22$$
$$\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha=-\frac{b}{2} \Rightarrow b=-12\alpha^3=12$$

이다. 따라서 $a=22$, $b=12$이므로 $a+b=34$이다.

답 34

07-9

삼차방정식 $x^3-4x^2-6x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$의 값을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=4,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6,\quad \alpha\beta\gamma=-2$$

이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{4^2-2\cdot(-6)}{(-2)}=-14$$

답 -14

07-10

삼차방정식 $x^3-3x^2+6x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

삼차방정식의 **삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)**에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6,\quad \alpha\beta\gamma=-1$$

에서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-6$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-3$$
$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

이므로 구하는 **삼차방정식(p.229)**은

$$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=x^3+6x^2-3x+1=0$$

답 $x^3+6x^2-3x+1=0$

07-11

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+28=0$의 한 근이 $4+\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

a, b가 모두 유리수이고 한 근이 $4+\sqrt{2}$이므로 $4-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 **삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)**에 의하여

$$\alpha(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})=-28 \Rightarrow \alpha=-2$$

이다. 즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 $4+\sqrt{2}$, $4-\sqrt{2}$, -2이므로 a, b는

$$a=-\{(4+\sqrt{2})+(4-\sqrt{2})-2\}=-6$$
$$b=(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})+(-2)(4+\sqrt{2})$$
$$+(-2)(4-\sqrt{2})=-2$$

이고 구하는 값은 $a+b=-6-2=-8$이다.

답 -8

07-12

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\dfrac{1}{2\omega-1}+\dfrac{1}{2\overline{\omega}-1}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

$x^3-1=0$에서

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

이므로 **허근 ω(p.231)**는

$$\omega^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=0$$

을 만족시킨다. 또한, 방정식 $x^2+x+1=0$의 좌변의 모든 항의 계수가 실수이고 ω가 한 근이므로 $\overline{\omega}$도 **나머지 한 근(p.230)**이다. 따라서 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이다. 이를 이용하여 주어진 식의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2\omega-1}+\frac{1}{2\overline{\omega}-1}=\frac{2\omega+2\overline{\omega}-2}{(2\omega-1)(2\overline{\omega}-1)}$$
$$=\frac{2(\omega+\overline{\omega})-2}{4\omega\overline{\omega}-2(\omega+\overline{\omega})+1}$$
$$=\frac{2\cdot(-1)-2}{4\cdot 1-2\cdot(-1)+1}=-\frac{4}{7}$$

답 $-\dfrac{4}{7}$

실전은 연습처럼

07-1

삼차방정식 $x^3-(2m-1)x^2+4x-(m^2+3)=0$이 세 실근 1, α, β를 가질 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, m은 상수이다.)

주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$$\begin{aligned}1-(2m-1)+4-(m^2+3)&=-m^2-2m+3\\&=-(m-1)(m+3)=0\end{aligned}$$

이므로 $m=1$ 또는 $m=-3$이다.

(i) $m=1$일 때, **삼차방정식(p.220)**

$$x^3-x^2+4x-4=(x-1)(x+2i)(x-2i)=0$$

의 근은 $x=1$ 또는 $x=-2i$ 또는 $x=2i$이므로 세 **실근(p.157)**을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m=-3$일 때, 삼차방정식

$$x^3+7x^2+4x-12=(x-1)(x+2)(x+6)=0$$

의 근은 $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-6$이고 이때 문제의 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=-6$, $\beta=-2$이고 구하는 $\alpha\beta$의 값은

$$\alpha\beta=(-6)\cdot(-2)=12$$

답 12

07-2

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

[보기]

ㄱ. $\omega^7+\omega^5+\omega^3+1=1$

ㄴ. $1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6=2w-3$

ㄷ. $\dfrac{1}{2\omega^3+3\omega^2+4\omega+2}=-\omega$

$x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이고 한 허근이 ω이므로

$$\omega^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=0$$

이 성립한다.

ㄱ. (참) **ω의 성질(p.231)**을 이용하면

$$\begin{aligned}\omega^7+\omega^5+\omega^3+1&=(\omega^3)^2\cdot\omega+(\omega^3)\cdot\omega^2+1+1\\&=\omega+\omega^2+1+1\\&=(\omega^2+\omega+1)+1=0+1=1\end{aligned}$$

ㄴ. (거짓) ω의 성질을 이용하여 간단히 하면

$$\begin{aligned}&1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6\\&=1+2\omega+3\omega^2+4+5\omega+6\omega^2+7\\&=9\omega^2+7\omega+12\\&=9(-\omega-1)+7\omega+12=-2w+3\end{aligned}$$

ㄷ. (참) ω의 성질을 이용하여 분모를 간단히 하면

$$2\omega^3+3\omega^2+4\omega+2=2+3(-1-\omega)+4\omega+2=\omega+1$$

이므로

$$\frac{1}{2\omega^3+3\omega^2+4\omega+2}=\frac{1}{\omega+1}=\frac{1}{-\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega^3}=-\omega$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

07-3

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+2ax+2=0$이 실근 한 개와 순허수인 두 개의 근을 가질 때, 실수 a의 값을 구하시오.

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 **실근(p.157)**을 p, **순허수(p.124)**인 두 근을 $\pm qi$($q\neq0$인 실수)라 둘 수 있다. **삼차방정식의 근과 계수의 관계(p.228)**에 의하여

$$p+qi-qi=-a\quad\Rightarrow\quad p=-a\qquad\cdots ㉠$$

$$p\cdot qi+qi\cdot(-qi)+(-qi)\cdot p=2a\quad\Rightarrow\quad q^2=2a\qquad\cdots ㉡$$

$$p\cdot qi\cdot(-qi)=-2\quad\Rightarrow\quad pq^2=-2\qquad\cdots ㉢$$

이므로 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$$-a\cdot2a=-2\quad\Rightarrow\quad a^2=1$$

이다. 이때, q는 0이 아닌 실수이므로 $q^2=2a>0$이고 구하는 실수 a의 값은 $a=1$이다.

답 1

07-4

x에 대한 사차방정식 $x^4-(k-2)x^3-(k-1)x^2-k^2x-k^2=0$이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오.

주어진 방정식의 좌변을 **조립제법(p.63)**을 이용하여 **인수분해(p.221)**하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 2-k & 1-k & -k^2 & -k^2\\
 & & -1 & k-1 & 0 & k^2\\ \hline
k & 1 & 1-k & 0 & -k^2 & 0\\
 & & k & k & k^2 & \\ \hline
 & 1 & 1 & k & 0 &
\end{array}$$

이므로 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-k)(x^2+x+k)=0$$

이다. 이 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 $k\neq-1$이고,
이차방정식 $x^2+x+k=0$이 $x\neq-1$, $x\neq k$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2+x+k=0$의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때,

$$D=1^2-4k>0\quad\Rightarrow\quad k<\frac{1}{4}$$

이고 $x=-1$, $x=k$가 모두 방정식 $x^2+x+k=0$의 근이 아니므로

$$1-1+k\neq0,\quad k^2+2k=k(k+2)\neq0$$

에서 $k\neq-2$, $k\neq0$이다. 따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 최댓값은 $k=-3$이다.

답 -3

07-5

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{1+\omega^n}$이라 하자. 이때 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$의 값을 구하시오.

주어진 방정식에서 $x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 **허근 ω(p.231)**에 대하여 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이 성립한다. 이때

$$f(1)=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,\quad f(4)=\frac{\omega^2}{1+\omega}=f(1)=-1,\quad \cdots$$
$$f(2)=\frac{\omega}{1+\omega^2}=-1,\quad f(5)=\frac{\omega}{1+\omega^2}=f(2)=-1,\quad \cdots$$
$$f(3)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},\quad f(6)=\frac{\omega^6}{1+\omega^3}=f(3)=\frac{1}{2},\quad \cdots$$

이므로

$$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(28)=-1,$$
$$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(29)=-1,$$
$$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(30)=\frac{1}{2}$$

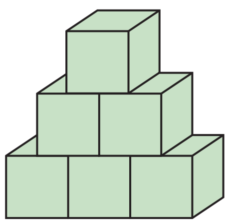
이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)\\&=-1\cdot10-1\cdot10+\frac{1}{2}\cdot10\\&=-10-10+5=-15\end{aligned}$$

답 -15

07-6

그림은 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체 6개를 쌓아 만든 입체도형이다. 이 입체도형의 부피를 $V\text{ cm}^3$, 겉넓이를 $S\text{ cm}^2$이라 할 때, $V=S-54$이다. 모든 x의 값의 합을 구하시오.



정육면체 6개를 쌓은 입체도형이므로

$$V=6x^3 \quad \cdots㉠$$

이다. 앞면과 뒷면에 보이는 도형의 겉넓이는 $6x^2+6x^2=12x^2$, 왼쪽과 오른쪽에 보이는 도형의 겉넓이는 $3x^2+3x^2=6x^2$, 위쪽과 아래쪽에 보이는 도형의 겉넓이는 $3x^2+3x^2=6x^2$이므로

$$S=12x^2+6x^2+6x^2=24x^2 \quad \cdots㉡$$

이다. 이때 ㉠, ㉡를 $V=S-54$에 대입하면

$$6x^3=24x^2-54,\quad \Rightarrow\quad x^3-4x^2+9=0$$

이다. $f(x)=x^3-4x^2+9$로 놓으면 $f(3)=27-36+9=0$이므로 **조립제법(p.63)**을 이용하여 $f(x)$를 **인수분해(p.221)**하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 0 & 9\\ & & 3 & -3 & -9\\ \hline & 1 & -1 & -3 & \boxed{0}\end{array}$$

에서 $f(x)=(x-3)(x^2-x-3)$이다. 그러므로 **삼차방정식(p.221)**

$$f(x)=(x-3)(x^2-x-3)=0$$

의 해는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$이다. 한편, x는 길이이므로 $x>0$으로부터 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$이다. 따라서 모든 x의 값의 합은 다음과 같다.

$$3+\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

답 $\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$

07-7

사차방정식 $(x^2-x)(x^2-5x+6)=8$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2-3\omega$의 값을 구하시오.

주어진 **사차방정식(p.220)** $(x^2-x)(x^2-5x+6)=8$을 정리하면

$$(x^2-x)(x^2-5x+6)-8=0$$

이다. 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}x(x-1)(x-2)(x-3)&=\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}\\&=(x^2-3x)(x^2-3x+2)=8\end{aligned}$$

에서 $x^2-3x=X$로 **치환(p.89)**하면

$$\begin{aligned}X(X+2)-8&=(X-2)(X+4)\\&=(x^2-3x-2)(x^2-3x+4)=0\end{aligned}$$

이다. 이때 이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$D=3^2-4\cdot(-2)=17>0$$

이므로 서로 다른 두 **실근(p.157)**을 갖고 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 판별식을 D'이라 하면

$$D'=3^2-4\cdot4=-7<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다. 따라서 $x^2-3x+4=0$의 한 근이 ω이고 $\omega^2-3\omega=-4$이다.

답 -4

07-8 교육청 기출

세 실수 a, b, c에 대하여 다항식 $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2+i$는 삼차방정식 $P(x)=0$의 근이다.
> (나) $P(x)$를 일차식 $x-1$로 나눈 나머지는 1이다.

이때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

조건 (가)에 의하여 허근 $2+i$가 삼차방정식 $P(x)=0$의 근이고 다항식 $P(x)$의 모든 계수가 실수이므로 **켤레근(p.230)** $2-i$도 $P(x)=0$의 근이다. 따라서 **삼차방정식(p.220)** $P(x)=0$의 또 다른 한 근을 α라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=x^3-ax^2+bx-c\\&=(x-2-i)(x-2+i)(x-\alpha)\\&=(x^2-4x+5)(x-\alpha)\end{aligned}$$

이다. 한편 조건 (나)에 의하여 $P(1)=2(1-\alpha)=1$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{2}$이다. 따라서

$$P(x)=(x^2-4x+5)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

이다. 이때

$$P(-1)=-1-a-b-c=-15$$

이므로 구하는 값은 $a+b+c=14$이다.

답 14

08 연립방정식

정의 & 포인트 확인

- 미지수가 2개인 연립일차방정식
- 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이
- 미지수가 3개인 연립일차방정식
- 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이

- 미지수가 2개인 연립이차방정식
  - $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식
- 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이
- 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

- 해의 범위가 정수일 때의 풀이
- 항등식의 성질을 이용한 풀이
- 실수의 성질을 이용한 풀이
- 공통근
- 두 방정식의 공통근을 구하는 방법

08-1 연립일차방정식

미지수가 2개인 연립일차방정식

다음과 같이 미지수가 2개이고 그 차수가 모두 1인 방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 미지수가 2개인 연립일차방정식이라 한다.

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

이때, 미지수가 2개인 연립일차방정식을 모두 만족하는 x, y의 값 또는 순서쌍 $(x,\ y)$를 이 연립방정식의 해 또는 근이라 하고, 방정식의 해를 모두 구하는 것을 연립방정식을 푼다고 한다.

연립방정식의 풀이는 미지수를 차례로 없애 최종적으로 미지수가 1개인 방정식으로 만들어서 해를 구하는 것이다.

정 의 상 8.1 **미지수가 2개인 연립일차방정식**

미지수가 2개이고 그 차수가 모두 1인 방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 **미지수가 2개인 연립일차방정식**이라 한다.

미지수가 2개인 연립일차방정식은 두 가지 풀이법이 있다.

- **대입법** 한 방정식을 다른 방정식에 대입하여 한 미지수를 없앤 후 해를 구하는 방법
- **가감법** 두 방정식에 적당한 수를 곱하여 각 변끼리 더하거나 빼서 미지수를 없앤 후 해를 구하는 방법

다음의 연립일차방정식을 두 가지 방법으로 풀어보자.

$$\begin{cases} x+2y=7 & \cdots (8.1.1) \\ 2x-y=4 & \cdots (8.1.2) \end{cases}$$

소거
두 개 이상의 식에 공통으로 포함된 문자가 있을 때, 이들 식에서 그 문자를 포함하지 않는 식을 만드는 과정을 소거라 한다.

대입법을 이용한 풀이

(9.1.1)의 식을 x에 대하여 정리하면

$$x=7-2y$$

이다. 이것을 (9.1.2)에 대입하면

$$2(7-2y)-y=4$$

이므로 $y=2$이다. 이 값을 $x=7-2y$에 대입하면 $x=3$이다.

가감법을 이용한 풀이

(9.1.1)$+$(9.1.2)$\times 2$를 하여 y를 소거하면

$$\begin{array}{rr} & x+2y=7 \\ +) & 4x-2y=8 \\ \hline & 5x=15 \end{array}$$

에서 $x=3$이고, 이것을 (9.1.1)에 대입하면 $y=2$이다.

포인트 상 8.2 **미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이**

두 개의 미지수 중 한 개를 소거하여 미지수의 값을 구한 뒤 한 식에 대입하여 다른 미지수의 값을 구한다.

보기 8.1 다음 연립일차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$

미지수가 2개인 연립일차방정식의 해

미지수가 2개인 연립일차방정식 중에는 앞의 예처럼 해가 1개인 경우 외에도 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우가 있다.

해가 무수히 많은 연립일차방정식

다음의 연립일차방정식을 풀어보자.

$$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots(8.1.3) \\ 2x+4y=6 & \cdots(8.1.4) \end{cases}$$

(8.1.4)의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면 $x+2y=3$이다. 이것과 (8.1.3)은 서로 같으므로, 동시에 만족하는 x, y의 값은 하나로 정해지지 않는다. 즉, 두 방정식 (8.1.3), (8.1.4)의 공통인 해 $(x,\ y)$는

$$(x,\ y)=(1,\ 1),\left(\sqrt{2},\ \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right),\left(2,\ \frac{1}{2}\right),\ (3,\ 0),\left(4,\ -\frac{1}{2}\right),\ (5,\ -1),\ \ldots$$

과 같이 $x+2y=3$을 만족하는 모든 순서쌍 $(x,\ y)$이다. 이 경우에는 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많다고 한다.

방정식의 해가 무수히 많으면 부정(不定)이라 한다.

해가 없는 연립일차방정식

다음의 연립일차방정식을 풀어보자.

$$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots(8.1.5) \\ 2x+4y=7 & \cdots(8.1.6) \end{cases}$$

$(8.1.5)\times 2-(8.1.6)$을 하면 $0=-1$이라는 모순된 결과를 얻는다. 따라서 x, y에 어떠한 값을 대입해도 주어진 방정식을 동시에 만족시키지 못한다. 이 경우에는 주어진 연립방정식의 해가 없다고 한다.

방정식의 해가 존재하지 않으면 불능(不能)이라 한다.

보기 정답

8.1 (1) $x=-1,\ y=1$
(2) $x=1,\ y=2$

한 걸음 더

미지수가 3개인 연립일차방정식

미지수가 3개이고 그 차수가 모두 1인 방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 미지수가 3개인 연립일차방정식이라 한다. 이 연립방정식의 미지수 중 한 미지수를 없애면 미지수가 2개인 연립일차방정식으로 만들어 풀 수 있다.

정 의 상 8.3 **미지수가 3개인 연립일차방정식**

미지수가 3개이고 그 차수가 모두 1인 방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 **미지수가 3개인 연립일차방정식**이라 한다.

연립방정식 $\begin{cases} x+y+3z=7 & \cdots(8.1.7) \\ 2x+3y+z=3 & \cdots(8.1.8) \\ x+2y+z=2 & \cdots(8.1.9) \end{cases}$ 를 풀어보자.

먼저 세 미지수 중 x를 소거하여 y, z에 대한 연립일차방정식을 만든다.

(8.1.7)$\times$2$-$(8.1.8)을 하면

$$\begin{array}{rr} & 2x+2y+6z=14 \\ -\big) & 2x+3y+\ \ z=\ \ 3 \\ \hline & -y+5z=11 \end{array}$$

(8.1.7)$-$(8.1.9)를 하면

$$\begin{array}{rr} & x+\ \ y+3z=7 \\ -\big) & x+2y+\ \ z=2 \\ \hline & -y+2z=5 \end{array}$$

위 두 식에서 y, z에 대한 연립일차방정식

$$\begin{cases} -y+5z=11 & \cdots(8.1.10) \\ -y+2z=5 & \cdots(8.1.11) \end{cases}$$

이 만들어진다. (8.1.10)$-$(8.1.11)을 하면 $3z=6$에서 $z=2$이므로 이 값을 (8.1.10) 또는 (8.1.11)에 대입하여 $y=-1$을 얻는다. 또한 y, z의 값을 (8.1.7), (8.1.8), (8.1.9) 중 한 식에 대입하여 $x=2$를 얻는다. 따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=-1$, $z=2$이다.

포인트 상 8.4 **미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이**

다음과 같은 순서로 푼다.

단계 1. 미지수가 3개인 연립일차방정식은 미지수 하나를 소거하여 **미지수가 2개인 연립일차방정식**(p.248)을 만든다.

단계 2. 단계 **1**에서 만든 방정식을 풀어 2개의 미지수의 값을 구한다.

단계 3. 단계 **2**에서 구한 값을 주어진 연립방정식 중 한 식에 대입하여 나머지 미지수의 값을 구한다.

보기 8.2

연립방정식 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ x+2y-z=3 \\ 2x-3y+z=5 \end{cases}$ 를 푸시오.

보기 정답

8.2 $x=3,\ y=1,\ z=2$

한 걸음 더

미지수가 3개인 연립일차방정식의 해

미지수가 3개인 연립일차방정식도 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우가 있다.

해가 무수히 많은 연립일차방정식

연립방정식 $\begin{cases} 4x+y+z=6 & \cdots (8.1.12) \\ 3x-y+z=3 & \cdots (8.1.13) \\ -2x+3y-z=0 & \cdots (8.1.14) \end{cases}$ 에서 미지수 z를 소거하자.

(8.1.12) − (8.1.13)을 하면	(8.1.13) + (8.1.14)를 하면
$\begin{array}{rl} & 4x+y+z=6 \\ -\big) & 3x-y+z=3 \\ \hline & x+2y=3 \quad \cdots (8.1.15) \end{array}$	$\begin{array}{rl} & 3x-y+z=3 \\ +\big) & -2x+3y-z=0 \\ \hline & x+2y=3 \quad \cdots (8.1.16) \end{array}$

이때 (8.1.15)와 (8.1.16)은 서로 같으므로 이를 동시에 만족하는 x, y의 값은 하나로 정해지지 않는다. 임의의 실수 t에 대하여 $x=t$라 하면 (8.1.15)에서 $y=-\frac{t}{2}+\frac{3}{2}$이다.

$x=t$, $y=-\frac{t}{2}+\frac{3}{2}$을 (8.1.12)에 대입하면 $z=-\frac{7}{2}t+\frac{9}{2}$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 임의의 실수 t에 대하여

$$x=t, \quad y=-\frac{t}{2}+\frac{3}{2}, \quad z=-\frac{7}{2}t+\frac{9}{2}$$

이다. 이 경우에는 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많다고 한다.

해가 없는 연립일차방정식

연립방정식 $\begin{cases} 4x+y+z=6 & \cdots (8.1.17) \\ 3x-y+z=3 & \cdots (8.1.18) \\ -2x+3y-z=1 & \cdots (8.1.19) \end{cases}$ 에서 미지수 z를 소거하자.

(8.1.17) − (8.1.18)을 하면	(8.1.18) + (8.1.19)를 하면
$\begin{array}{rl} & 4x+y+z=6 \\ -\big) & 3x-y+z=3 \\ \hline & x+2y=3 \quad \cdots (8.1.20) \end{array}$	$\begin{array}{rl} & 3x-y+z=3 \\ +\big) & -2x+3y-z=1 \\ \hline & x+2y=4 \quad \cdots (8.1.21) \end{array}$

(8.1.20) − (8.1.21)을 하면 $0=-1$이라는 모순된 결과를 얻는다. 따라서 x, y에 어떠한 값을 대입해도 주어진 방정식을 동시에 만족시키지 못한다. 이 경우에는 주어진 연립방정식의 해가 없다고 한다.

연립일차방정식의 풀이

예제 01

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x+5y=-2 & \cdots ㉠ \\ x+2y=-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y+z=5 & \cdots ㉢ \\ 2x+y-z=10 & \cdots ㉣ \\ 3x-y-2z=1 & \cdots ㉤ \end{cases}$

길잡이 연립일차방정식의 풀이는 미지수를 차례로 줄여 **최종적으로 미지수가 1개인 방정식으로 만드는 것**이다.

풀 이

(1) ㉠$-$㉡$\times 3$을 하여 x를 소거하면

$$-y=7 \quad \Rightarrow \quad y=-7$$

이다. 이를 ㉡에 대입하면

$$x-14=-3 \quad \Rightarrow \quad x=11$$

이므로 구하는 연립방정식의 해는 $x=11$, $y=-7$이다.

(2) ㉢$-$㉣을 하여 y를 소거하면

$$-x+2z=-5 \qquad \cdots ㉥$$

이고 ㉣$+$㉤을 하여 y를 소거하면

$$5x-3z=11 \qquad \cdots ㉦$$

이다. ㉥, ㉦을 연립하여 풀면 $x=1$, $z=-2$이고 이것을 ㉢에 대입하면 $y=6$이다. 따라서 구하는 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=6$, $z=-2$이다.

정답 (1) $(x,\ y)=(11,\ -7)$
(2) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 6,\ -2)$

- 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이(p.250)
- 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이(p.249)

돌다리 두드리기

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x+y=-7 \\ x+2y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 5x+2y+z=1 \\ 3x+4y-2z=17 \end{cases}$

돌다리 두드리기

|답| (1) $(x,\ y)=(-3,\ 2)$
(2) $(x,\ y,\ z)=(-1,\ 4,\ -2)$

(1) $\begin{cases} 3x+y=-7 & \cdots ㉠ \\ x+2y=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ ㉠$-$㉡$\times 3$ $\Rightarrow$ $5y=10$이다. 따라서 $y=2$이고 ㉡에 대입하면 $x=-3$이다.

(2) $\begin{cases} 2x+y-z=4 & \cdots ㉢ \\ 5x+2y+z=1 & \cdots ㉣ \\ 3x+4y-2z=17 & \cdots ㉤ \end{cases}$ ㉢$+$㉣, ㉢$\times 2-$㉤을 하면 $7x+3y=5$, $x-2y=-9$이고 두 식을 연립하면 $x=-1$, $y=4$이다. ㉢에 대입하면 $z=-2$이다.

정답 및 풀이 p.535

개념 그대로

유제 01-1

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x+3y=-4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x+y-z=8 \\ x+y-2z=9 \end{cases}$

(1) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} 2x-y=3 & \cdots ㉠ \\ 4x+3y=-4 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠×3+㉡을 하여 y를 소거하면 $10x=5 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$이다. 이를 ㉠에 대입하면 $1-y=3 \Rightarrow y=-2$이므로 구하는 연립방정식의 해는 $x=\frac{1}{2}$, $y=-2$이다.

(2) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x-2y+z=-3 & \cdots ㉢ \\ 2x+y-z=8 & \cdots ㉣ \\ x+y-2z=9 & \cdots ㉤ \end{cases}$$

이라 하자. ㉢+㉣을 하면

$$3x-y=5 \quad \cdots ㉥$$

이고 ㉢×2+㉤을 하면

$$3x-3y=3 \quad \cdots ㉦$$

이다. ㉥, ㉦을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$이고 이것을 ㉢에 대입하면 $z=-3$이다. 따라서 구하는 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=1$, $z=-3$이다.

답 (1) $(x, y)=\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
(2) $(x, y, z)=(2, 1, -3)$

개념 그대로

유제 01-2

연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$ 을 푸시오.

주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots ㉠ \\ y+z=6 & \cdots ㉡ \\ z+x=7 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠+㉡+㉢을 하면 $2x+2y+2z=18$ 즉,

$$x+y+z=9 \quad \cdots ㉣$$

이다. ㉠을 ㉣에 대입하면 $z=4$, ㉡을 ㉣에 대입하면 $x=3$, ㉢을 ㉣에 대입하면 $y=2$이다. 따라서 구하는 연립방정식의 해는 $x=3$, $y=2$, $z=4$이다.

답 $(x, y, z)=(3, 2, 4)$

개념 그대로

유제 01-3

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=1 \end{cases}$ 을 푸시오. (단, a는 상수이다.)

주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} ax+y=1 & \cdots ㉠ \\ x+ay=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠×a−㉡을 하여 y를 소거하면

$$(a^2-1)x=a-1 \quad \Rightarrow \quad (a+1)(a-1)x=(a-1)$$

이다. a의 값에 따라 다음과 같이 방정식의 해를 정할 수 있다.

(i) $a=1$일 때, $0\cdot x=0$이다. 따라서 해가 무수히 많다.
(ii) $a=-1$일 때, $0\cdot x=-2$이다. 따라서 해가 없다.
(iii) $a\neq\pm1$일 때, 양변을 $(a+1)(a-1)$로 나누면 $x=\frac{1}{a+1}$이고 이를 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{a+1}$이다.

답 $a=1$일 때, 해가 무수히 많다.
$a=-1$일 때, 해가 없다.
$a\neq\pm1$일 때, $(x, y)=\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$

08-2 연립이차방정식

연립이차방정식

다음과 같이 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 미지수가 2개인 연립이차방정식이라 한다.

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2-5y^2=-4 \end{cases}$$

미지수가 2개인 연립이차방정식의 꼴
미지수가 2개인 연립이차방정식은

$$\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$$

과 같은 두 가지 꼴이 있다.

정 의 상 8.5 **미지수가 2개인 연립이차방정식**

미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 **미지수가 2개인 연립이차방정식**이라 한다.

연립이차방정식의 풀이 I

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 일차방정식에서 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 정리한 후, 이것을 이차방정식에 대입하여 미지수가 1개인 이차방정식으로 만들어서 푼다. 다음 연립이차방정식을 풀어보자.

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots (8.2.1) \\ x^2+y^2=5 & \cdots (8.2.2) \end{cases}$$

(8.2.1)에서 $y=x-1$이고 이를 (8.2.2)에 대입하면 $x^2+(x-1)^2=5$이다. 정리하면

$$2x^2-2x-4=2(x-2)(x+1)=0$$

에서 $x=-1$ 또는 $x=2$를 얻는다. 이때 $x=-1$을 (8.2.1)에 대입하면 $y=-2$이고, $x=2$를 (8.2.1)에 대입하면 $y=1$이다. 따라서 구하는 해는 $(x,\ y)=(-1,\ -2),\ (2,\ 1)$이다.

연립방정식의 해를

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

로 표현할 수도 있다.

포인트 상 8.6 **일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이**

다음과 같은 순서로 푼다.

단계 1. 일차방정식에서 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 정리한다.
단계 2. 이차방정식에 대입하여 한 미지수에 대한 이차방정식을 푼다.
단계 3. 위에서 구한 값을 일차방정식에 대입하여 다른 미지수의 값을 구한다.

연립이차방정식의 풀이 II

두 이차방정식 중 하나가 인수분해되는 경우

우선 두 이차방정식 중 어느 한 식이 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우 인수분해를 통해 두 일차방정식을 얻고, 각각의 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots (8.2.3) \\ x^2-5y^2=-4 & \cdots (8.2.4) \end{cases}$$

(8.2.3)의 좌변은 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있으므로

$$x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)=0$$

으로부터 $x=y$ 또는 $x=2y$이다.

(i) $x=y$를 (8.2.4)에 대입하면 $-4y^2=-4$에서 $y=\pm1$이고 $x=\pm1$이다.
따라서 $x=\pm1,\ y=\pm1$이다. (복호동순)

(ii) $x=2y$를 (8.2.4)에 대입하면 $-y^2=-4$에서 $y=\pm2$이고 $x=\pm4$이다.
따라서 $x=\pm4,\ y=\pm2$이다. (복호동순)

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (4,\ 2),\ (-4,\ -2)$이다.

복호동순(복부호동순)
식에서 복호(여러 가지 기호를 동시에 사용하는 것)를 사용할 때 위에서부터 차례로 사용한다. 보통 $\pm$와 $\mp$가 있다. 예를 들어,

$$x=\pm1,\ y=\mp1 \text{ (복호동순)}$$

의 의미는 $x=1,\ y=-1$ 또는 $x=-1,\ y=1$이다.

두 이차방정식이 모두 인수분해되지 않는 경우

두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식에서 두 이차방정식이 모두 인수분해되지 않는 경우에는 두 이차방정식에서 이차항을 소거하여 일차방정식을 얻어 풀거나, 상수항을 소거하여 얻은 이차방정식을 인수분해하여 푼다.

이차항은 $x^2,\ xy,\ y^2$인 경우이다.

이차항을 소거하는 풀이 두 이차방정식이 모두 인수분해가 되지 않지만 이차항을 모두 소거할 수 있는 경우, 이차항을 소거하여 일차방정식을 만든다. 이 일차식을 이용하여 **일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이**(p.254)법과 같이 푼다. 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+2x-4y+1=0 & \cdots (8.2.5) \\ x^2-x+2y-2=0 & \cdots (8.2.6) \end{cases}$$

에서 (8.2.5)$-$(8.2.6)을 하면 이차항인 x^2이 소거되어 일차식

$$3x-6y+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=2y-1 \qquad \cdots (8.2.7)$$

을 얻는다. (8.2.7)을 (8.2.5)에 대입하면

$$(2y-1)^2+2(2y-1)-4y+1=4y^2-4y=4y(y-1)=0$$

이므로 $y=0$ 또는 $y=1$이다. $y=0$을 (8.2.7)에 대입하면 $x=-1$이고, $y=1$을 (8.2.7)에 대입하면 $x=1$이다. 따라서 구하는 해는 $(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (1,\ 1)$이다.

상수항을 소거하는 풀이 두 이차방정식이 모두 인수분해가 되지 않고, 이차항을 모두 소거할 수 없는 경우에는 상수항을 소거하여 인수분해가 가능한 이차방정식으로 바꾸어 푼다.

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 & \cdots(8.2.8) \\ -x^2+5xy-y^2=5 & \cdots(8.2.9) \end{cases}$$

(8.2.8) − (8.2.9)를 하여 상수항을 소거하면 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해된다.

$$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y)=0$$

따라서 $y=2x$ 또는 $x=3y$이다.

(i) $y=2x$를 (8.2.8)에 대입하면 $5x^2=5$에서 $x=\pm1$이고 $y=\pm2$이다.
따라서 $x=\pm1,\ y=\pm2$이다. (복호동순)

(ii) $x=3y$를 (8.2.8)에 대입하면 $5y^2=5$에서 $y=\pm1$이고 $x=\pm3$이다.
따라서 $x=\pm3,\ y=\pm1$이다. (복호동순)

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ -2),\ (3,\ 1),\ (-3,\ -1)$이다.

포인트 상 8.7 **두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이**

두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식이

- **이차식을 인수분해할 수 있는 경우**
  일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 바꾸어 푼다.
- **이차식을 인수분해할 수 없는 경우**
  (a) 이차항을 모두 소거할 수 있는 경우, 이차항을 소거한 후 일차방정식을 주어진 이차방정식에 대입하여 푼다.
  (b) 이차항을 모두 소거할 수 없는 경우, 상수항을 소거한 후 이차식을 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 주어진 이차방정식에 대입하여 푼다.

보기 8.3 다음 연립방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2-2y=-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2-xy-y^2=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x^2+2y^2+x-3y=20 \\ x^2+y^2+x-3y=10 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=1 \\ x^2-xy-4y^2=-2 \end{cases}$

보기 정답

8.3 (1) $(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (3,\ 5)$
(2) $(x,\ y)=(-4,\ -2),\ (4,\ 2)$
$(-2,\ 2),\ (2,\ -2)$
(3) $(x,\ y)=(-3,\ -1),\ (3,\ 1)$
(4) $(x,\ y)=(-2,\ -1),\ (2,\ 1)$
$(-1,\ 1),\ (1,\ -1)$

$x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식

$x+y$와 xy로 표현할 수 있는 연립이차방정식은 두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)을 이용한 풀이가 가능하다. 연립이차방정식

$$\begin{cases} x+y-xy=1 & \cdots(8.2.10) \\ 2x+2y-3xy=-1 & \cdots(8.2.11) \end{cases}$$

을 풀어보자. $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$$x+y-xy=u-v, \quad 2x+2y-3xy=2u-3v$$

이므로 x, y에 대한 연립방정식은

$$\begin{cases} u-v=1 \\ 2u-3v=-1 \end{cases}$$

과 같이 u, v에 대한 연립방정식이 된다. 이 연립방정식을 풀면 $u=4$, $v=3$이다. x, y를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x+y=4$, $xy=3$이므로 $t^2-4t+3=0$이다. 좌변을 인수분해하면

$$t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$$

에서 t에 대한 이차방정식의 근은 $t=1$ 또는 $t=3$이다. 따라서 구하는 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 3), (3, 1)$이다.

$x+y$, xy로 표현가능한 식
두 문자 x, y로 이루어진 식 중에서 x와 y의 자리를 바꾸어도 식이 변하지 않으면 그 식을 $x+y$, xy로 표현할 수 있다. 이때 $x=\alpha$, $y=\beta$가 연립방정식의 근이면 $x=\beta$, $y=\alpha$도 연립방정식의 근이다.

이차항을 소거하는 풀이
(8.2.10)$\times 3-$(8.2.11)을 하여 이차항을 소거하면

$$x+y=4 \quad \Rightarrow \quad x=4-y \quad \cdots(8.2.12)$$

이다. (8.2.12)를 (8.2.10)에 대입하면

$$y^2-4y+3=0$$

에서 $y=1$ 또는 $y=3$이다.

- $y=1$이면 (8.2.12)에서 $x=3$
- $y=3$이면 (8.2.12)에서 $x=1$

이다. 따라서 구하는 해는 $(x, y)=(1, 3), (3, 1)$이다.

포인트 상 8.8 **$x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식**

- $x+y=u$, $xy=v$로 두고 u, v에 대한 연립방정식을 풀어 u, v의 값을 구한다.
- x, y는 t에 대한 이차방정식

$$t^2-ut+v=0$$

의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

예 시

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ 에서 $x+y=u$, $xy=v$라 놓으면 $\begin{cases} u=2 \\ u^2-2v=10 \end{cases}$ 이므로 $u=2$, $v=-3$이다. 즉 $x+y=2$, $xy=-3$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t-3=0$의 근이다. $t=-1$ 또는 $t=3$에서 구하는 해는

$$(x, y)=(-1, 3), (3, -1)$$

이다.

보기 8.4 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} xy=8 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

보기 정답

8.4 (1) $(x, y)=(1, 2), (2, 1)$
(2) $(x, y)=(-4, -2), (4, 2)$
$(-2, -4), (2, 4)$

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식의 풀이

예제 02 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-y=-2 & \cdots ㉠ \\ 3x^2+y^2=28 & \cdots ㉡ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots ㉢ \\ x^2+2xy+y^2=4 & \cdots ㉣ \end{cases}$

길잡이 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식은 **일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 다음 이차방정식에 대입**하여 해를 구한다.

또한 **두 일차식으로 인수분해되는 이차방정식은 두 개의 일차방정식이 주어진 것**과 같고, 각각의 일차방정식을 이용하여 연립방정식을 푼다.

풀 이

• 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이(p.254)

(1) ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=x+2$이고, 이것을 ㉡에 대입하고 정리하면

$$3x^2+(x+2)^2=28 \quad \Rightarrow \quad 4x^2+4x-24=4(x+3)(x-2)=0$$

이므로 $x=-3$ 또는 $x=2$이다.

(i) $x=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=-1$이다.

(ii) $x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=4$이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $(x, y)=(-3, -1), (2, 4)$이다.

(2) ㉢의 좌변을 인수분해하면 $(2x-y)(x-y)=0$이므로 $y=2x$ 또는 $y=x$이다.

(i) $y=x$를 ㉣에 대입하면

$$x^2+2x^2+x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x^2=1$$

이므로 $x=\pm1$이고 $y=x$이므로 $y=\pm1$이다. (복호동순)

(ii) $y=2x$를 ㉣에 대입하면

$$x^2+4x^2+4x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{4}{9}$$

이므로 $x=\pm\frac{2}{3}$이고 $y=2x$이므로 $y=\pm\frac{4}{3}$이다. (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

정답 (1) $(x, y)=(-3, -1), (2, 4)$
(2) $(x, y)=(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

돌다리 두드리기

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-y=-3 \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-16y^2=0 \\ x^2+2xy=24 \end{cases}$

(1) $y=x+3$을 이차식 $x^2+y^2-29=0$에 대입하면

$$2x^2+6x-20=2(x^2+3x-10)=2(x+5)(x-2)=0$$

이다. 따라서 $x=-5$이면 $y=-2$이고, $x=2$이면 $y=5$이다.

(2) 첫 번째 이차식을 풀면 $x=4y$ 또는 $x=-4y$이다. 이를 이차식 $x^2+2xy=24$에 대입하면

(i) $x=4y$일 때, $24y^2=24$이므로 $y=\pm1$이고 $x=\pm4$이다. (복호동순)

(ii) $x=-4y$일 때, $8y^2=24$이므로 $y=\pm\sqrt{3}$이고 $x=\mp4\sqrt{3}$이다. (복호동순)

돌다리 두드리기

|답| (1) $(x, y)=(-5, -2), (2, 5)$
(2) $(x, y)=(4, 1), (-4, -1), (4\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-4\sqrt{3}, \sqrt{3})$

개념 그대로

유제 02-1

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x-y=-5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$

(1) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} 2x-y=-5 & \cdots㉠ \\ x^2-xy+y^2=7 & \cdots㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=2x+5$이고, 이것을 ㉡에 대입하고 정리하면

$$x^2-x(2x+5)+(2x+5)^2=7 \quad\Rightarrow\quad 3(x+2)(x+3)=0$$

이므로 $x=-2$ 또는 $x=-3$이다.

(i) $x=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=1$

(ii) $x=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=-1$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $(x, y)=(-2, 1), (-3, -1)$이다.

(2) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots㉢ \\ x^2+y^2=8 & \cdots㉣ \end{cases}$$

이라 하자. ㉢을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+4$이고, 이것을 ㉣에 대입하고 정리하면

$$x^2+(-x+4)^2=8 \quad\Rightarrow\quad 2(x-2)^2=0$$

이므로 $x=2$이고, ㉢에 대입하여 y의 값을 구하면 $y=2$이다. 따라서 연립방정식의 해는 $(x, y)=(2, 2)$이다.

답 (1) $(x, y)=(-2, 1), (-3, -1)$ (2) $(x, y)=(2, 2)$

개념 그대로

유제 02-2

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=9 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2+xy=12 \end{cases}$

(1) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9 & \cdots㉠ \\ x^2-y^2=0 & \cdots㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉡은 $(x+y)(x-y)=0$이므로 $y=-x$ 또는 $y=x$이다.

(i) $y=-x$를 ㉠에 대입하면 $x^2-x^2+x^2=9$에서 $x^2=9$이므로 $x=\pm3$이고 $y=-x$이므로 $y=\mp3$ (복호동순)이다.

(ii) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$$x^2+x^2+x^2=9 \quad\Rightarrow\quad x^2=3$$

이므로 $x=\pm\sqrt{3}$이고 $y=x$이므로 $y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $(x, y)=(3, -3), (-3, 3), (\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$이다.

(2) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots㉢ \\ x^2+xy=12 & \cdots㉣ \end{cases}$$

이라 하자. ㉢은 $(x+y)(x-3y)=0$이므로 $x=-y$ 또는 $x=3y$이다.

(i) $x=-y$를 ㉣에 대입하면 $y^2-y^2=12$에서 $0=12$이므로 해가 없다.

(ii) $x=3y$를 ㉣에 대입하면 $9y^2+3y^2=12$에서 $y^2=1$이므로 $y=\pm1$이고 $x=3y$이므로 $x=\pm3$ (복호동순)이다.

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $(x, y)=(3, 1), (-3, -1)$이다.

답 (1) $(x, y)=(3, -3), (-3, 3), (\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
(2) $(x, y)=(3, 1), (-3, -1)$

개념 그대로

유제 02-3

연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 5x^2-y^2=4 \end{cases}$ 를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots㉠ \\ 5x^2-y^2=4 & \cdots㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠을 인수분해하면 $(2x-y)(x-y)=0$이므로 $y=2x$ 또는 $y=x$이다.

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$$5x^2-4x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x^2=4$$

이므로 $x=\pm2$이고 $y=2x$이므로 $y=\pm4$ (복호동순)이다. 따라서 $xy=8$이다.

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$$5x^2-x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x^2=1$$

이므로 $x=\pm1$이고 $y=x$이므로 $y=\pm1$ (복호동순)이다. 따라서 $xy=1$이다.

(i), (ii)에서 xy는 $(x, y)=(2, 4), (-2, -4)$일 때 최댓값 8을 갖는다.

답 8

두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이 2

예제 03 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-5x+6y+6=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-3x+4y+4=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=6 & \cdots ㉢ \\ x^2-xy+y^2=3 & \cdots ㉣ \end{cases}$

| 길잡이 | 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식에서 두 이차식이 모두 인수분해가 불가능한 경우,

- **이차항을 모두 소거할 수 있는 경우**에는 **이차항을 소거하여 일차식을 구한다.**
- **이차항을 모두 소거할 수 없는 경우**에는 **상수항을 소거하여 나온 이차식을 인수분해하여 일차식을 구한다.**

• 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이(p.256)

| 풀 이 |

(1) ㉠$-$㉡을 하면 이차항 x^2이 모두 소거된다. 즉,

$$-2x+2y+2=0 \quad \Rightarrow \quad y=x-1 \qquad \cdots ㉤$$

이다. ㉤을 ㉠에 대입하면

$$x^2-5x+6(x-1)+6=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+x=x(x+1)=0$$

에서 $x=-1$ 또는 $x=0$이다.

(i) $x=-1$을 ㉤에 대입하면 $y=-2$

(ii) $x=0$을 ㉤에 대입하면 $y=-1$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=(-1,\ -2),\ (0,\ -1)$이다.

(2) 이차항 x^2, xy, y^2을 모두 소거할 수 없으므로 ㉢$-$㉣$\times 2$를 하여 상수항을 소거하면

$$-xy-y^2=0 \quad \Rightarrow \quad xy+y^2=y(x+y)=0$$

이므로 $y=0$ 또는 $y=-x$이다.

(i) $y=0$을 ㉢에 대입하면 $x^2=3$이므로 $x=\pm\sqrt{3}$이다.

(ii) $y=-x$를 ㉢에 대입하면 $x^2=1$이므로 $x=\pm 1$이고 $y=-x$이므로 $y=\mp 1$이다. (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=(\sqrt{3},\ 0),\ (-\sqrt{3},\ 0),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1)$이다.

| 정답 | (1) $(x,\ y)=(-1,\ -2),\ (0,\ -1)$
(2) $(x,\ y)=(\sqrt{3},\ 0),\ (-\sqrt{3},\ 0),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1)$

돌다리 두드리기

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} y^2-2x-y+2=0 \\ y^2-x-4y+4=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 \\ 4x^2-11xy+7y^2=10 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} y^2-2x-y+2=0 \cdots ㉠ \\ y^2-x-4y+4=0 \cdots ㉡ \end{cases}$ ㉠$-$㉡을 하여 이차항을 소거하면 $x=3y-2$이다. 이것을 ㉡에 대입하면 $(y-1)(y-6)=0$에서 $y=1$ 또는 $y=6$이므로 $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (16,\ 6)$이다.

(2) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 \cdots ㉢ \\ 4x^2-11xy+7y^2=10 \cdots ㉣ \end{cases}$ ㉢$\times 2-$㉣을 하여 상수항을 소거하면 $(2x-y)(x-3y)=0$이다. $y=2x$를 ㉢에 대입하면 $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ -2)$이고, $x=3y$를 ㉢에 대입하면 $(x,\ y)=(3,\ 1),\ (-3,\ -1)$이다.

돌다리 두드리기

| 답 | (1) $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (16,\ 6)$
(2) $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (3,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-3,\ -1)$

개념 그대로

유제 03-1

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2+2x+2y-y^2=5 \\ x^2+x-y^2=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x^2+3x-5y=9 \\ 3x^2-5x+2y=4 \end{cases}$

(1) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x^2+2x+2y-y^2=5 & \cdots ㉠ \\ x^2+x-y^2=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠－㉡을 하면 이차항 x^2, y^2이 모두 소거된다. 즉,

$$x+2y=2 \quad \Rightarrow \quad x=2-2y \quad \cdots ㉢$$

이다. 이것을 ㉡에 대입하면 $(3y-1)(y-3)=0$에서 $y=\frac{1}{3}$ 또는 $y=3$이다.

(i) $y=\frac{1}{3}$을 ㉢에 대입하면 $x=\frac{4}{3}$

(ii) $y=3$을 ㉢에 대입하면 $x=-4$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $(-4,\ 3)$이다.

(2) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} 2x^2+3x-5y=9 & \cdots ㉣ \\ 3x^2-5x+2y=4 & \cdots ㉤ \end{cases}$$

이라 하자. ㉣×3－㉤×2를 하면 이차항 x^2이 모두 소거된다. 즉,

$$19x-19y=19 \quad \Rightarrow \quad y=x-1 \quad \cdots ㉥$$

이다. ㉥을 ㉣에 대입하면 $2(x+1)(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.

(i) $x=-1$을 ㉥에 대입하면 $y=-1-1=-2$이다.

(ii) $x=2$를 ㉥에 대입하면 $y=2-1=1$이다.

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=(-1,\ -2)$, $(2,\ 1)$이다.

답 (1) $(x,\ y)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $(-4,\ 3)$
(2) $(x,\ y)=(-1,\ -2)$, $(2,\ 1)$

개념 그대로

유제 03-2

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=1 \\ 2x^2-2xy-y^2=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ xy+y^2=-3 \end{cases}$

(1) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x^2-xy-y^2=1 & \cdots ㉠ \\ 2x^2-2xy-y^2=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠×3－㉡을 하여 상수항을 소거하면 $(x+y)(x-2y)=0$이므로 $x=-y$ 또는 $x=2y$이다.

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하면 $y^2=1$이므로 $y=\pm1$이고 이 값을 $x=-y$에 대입하면 $x=\mp1$이다. (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉠에 대입하면 $y^2=1$이므로 $y=\pm1$이고 이 값을 $x=2y$에 대입하면 $x=\pm2$이다. (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는
$(x,\ y)=(1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(-2,\ -1)$이다.

(2) 주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x^2+xy=12 & \cdots ㉢ \\ xy+y^2=-3 & \cdots ㉣ \end{cases}$$

이라 하자. ㉢＋㉣×4를 하여 상수항을 소거하면 $(x+y)(x+4y)=0$이므로 $x=-y$ 또는 $x=-4y$이다.

(i) $x=-y$를 ㉢에 대입하면 $0=12$이므로 해가 없다.

(ii) $x=-4y$를 ㉢에 대입하면 $y^2=1$이므로 $y=\pm1$이고 $x=-4y$이므로 $x=\mp4$이다. (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=(4,\ -1)$, $(-4,\ 1)$이다.

답 (1) $(x,\ y)=(1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(-2,\ -1)$
(2) $(x,\ y)=(4,\ -1)$, $(-4,\ 1)$

개념 그대로

유제 03-3

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x-y=2 \\ 2x^2+2y^2+3x-y=6 \end{cases}$ 을 만족하는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식을

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-y=2 & \cdots ㉠ \\ 2x^2+2y^2+3x-y=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠×2－㉡을 하면 이차항 x^2, y^2가 모두 소거된다. 즉,

$$x-y=-2 \quad \Rightarrow \quad y=x+2 \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉢을 ㉠에 대입하면

$$x^2+(x+2)^2+2x-(x+2)=2 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(x+\frac{5}{2}\right)=0$$

에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$이다.

(i) $x=0$을 ㉢에 대입하면 $y=2$이고 $x^2+y^2=4$이다.

(ii) $x=-\frac{5}{2}$를 ㉢에 대입하면 $y=-\frac{1}{2}$이고 $x^2+y^2=\frac{13}{2}$이다.

(i), (ii)에서 $(x,\ y)=\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$일 때, x^2+y^2은 최댓값 $\frac{13}{2}$을 갖는다.

답 $\frac{13}{2}$

예제 04 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 & \cdots ㉠ \\ x+y-3xy=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

| 길잡이 | $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식은 $x+y=u$, $xy=v$로 두고 u, v에 대한 연립방정식을 풀어 u, v의 값을 구한다. 이때 x, y는 t에 대한 이차방정식

$$t^2-ut+v=0$$

의 두 근임을 이용한다.

| 풀 이 |

1단계 $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 주어진 연립방정식을 u, v에 대하여 나타낸다.

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 등식 ㉠의 좌변은

$$x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=u^2-3v$$

이고 등식 ㉡의 좌변은

$$x+y-3xy=u-3v$$

이므로 주어진 연립방정식은 u, v에 대한 연립이차방정식

$$\begin{cases} u^2-3v=1 & \cdots ㉢ \\ u-3v=-1 & \cdots ㉣ \end{cases}$$

으로 나타낼 수 있다.

2단계 u, v에 대한 연립방정식을 푼다.

㉢$-$㉣을 하면

$$u^2-u-2=0 \quad \Rightarrow \quad (u-2)(u+1)=0$$

이므로 $u=2$ 또는 $u=-1$이다. ㉣에서 $u=2$일 때 $v=1$이고, $u=-1$일 때 $v=0$이다.

3단계 x, y가 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

(i) $u=2$, $v=1$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t+1=0$의 두 근이다. 따라서 $x=y=1$이다.

(ii) $u=-1$, $v=0$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t=0$의 두 근이다. 따라서 $x=0$, $y=-1$ 또는 $x=-1$, $y=0$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$이다.

| 정답 | $(x, y)=(1, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$

1 • $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식(p.257)
• 곱셈 공식의 변형 I(p.23)

2 • 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이(p.254)

3 • 두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)
• 인수분해를 통한 풀이(p.156)

돌다리 두드리기

연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=6 \end{cases}$ 의 해를 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $(x, y)=(1, 6)$, $(6, 1)$

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-7t+6=0$, $(t-1)(t-6)=0$의 두 근이라 할 수 있으므로 $(x, y)=(1, 6)$, $(6, 1)$이다.

정답 및 풀이 p.537

개념 더하기

유제 04-1

+ 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이(p.249)

다음 연립방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ 3x+3y-4xy=1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{cases}$

(1) $x+y=u,\ xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은 $u,\ v$에 대한 연립일차방정식 $\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ 3u-4v=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. ㉠$\times 3-$㉡을 하면 $7v=14$이므로 $v=2$이고, 이때 ㉠에서 $u=5-v$이므로 $u=3$이다. $x+y=3,\ xy=2$이므로 $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이다. 즉,

$$(t-1)(t-2)=0 \quad \Rightarrow \quad t=1 \text{ 또는 } t=2$$

이므로 주어진 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$이다.

(2) $x+y=u,\ xy=v$라 하면 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 주어진 연립방정식은 $u,\ v$에 대한 연립이차방정식 $\begin{cases} u^2-2v=34 & \cdots ㉢ \\ v=15 & \cdots ㉣ \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. ㉣을 ㉢에 대입하여 풀면 $u=\pm 8$이다. 따라서 $(u,\ v)=(8,\ 15),\ (-8,\ 15)$이다.

(i) $u=8,\ v=15$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이다. 따라서 $x=3,\ y=5$ 또는 $x=5,\ y=3$이다.

(ii) $u=-8,\ v=15$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이다. 따라서 $x=-3,\ y=-5$ 또는 $x=-5,\ y=-3$이다.

답 (1) $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$
(2) $(x,\ y)=(3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (-3,\ -5),\ (-5,\ -3)$

개념 바꾸기

유제 04-2

− 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이(p.254)
+ 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이(p.256)

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 구하시오.

$x+y=u,\ xy=v$라 하면 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 주어진 연립방정식은 $u,\ v$에 대한 연립이차방정식 $\begin{cases} u^2+u-2v=4 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다.

㉠$-$㉡을 하여 이차항을 소거하면 $v=u-1 \cdots ㉢$ 이다. ㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면 $(u+1)(u-2)=0$이므로 $u=-1$ 또는 $u=2$이다. $u=-1$일 때, ㉢에 대입하면 $v=-2$이고 $u=2$일 때, ㉢에 대입하면 $v=1$이다. 따라서

$$(u,\ v)=(-1,\ -2),\ (2,\ 1)$$

(i) $u=-1,\ v=-2$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-2=0$의 두 근이다. 따라서 $x=-2,\ y=1$ 또는 $x=1,\ y=-2$이다.

(ii) $u=2,\ v=1$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t+1=0$의 두 근이다. 따라서 $x=1,\ y=1$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=(-2,\ 1),\ (1,\ -2),\ (1,\ 1)$이다.

답 $(x,\ y)=(-2,\ 1),\ (1,\ -2),\ (1,\ 1)$

개념 그대로

유제 04-3

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=2 \end{cases}$ 의 해를 구하시오.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 $x+y=u,\ xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은 $u,\ v$에 대한 연립이차방정식 $\begin{cases} u^2-2v=4 & \cdots ㉠ \\ v=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. ㉡을 ㉠에 대입해서 정리하면 $u^2=8$로부터 $v=\pm 2\sqrt{2}$이다. 따라서 $(u,\ v)=(2\sqrt{2},\ 2),\ (-2\sqrt{2},\ 2)$이다.

(i) $u=2\sqrt{2},\ v=2$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2\sqrt{2}t+2=(t-\sqrt{2})^2=0$의 두 근이다. 따라서 $x=y=\sqrt{2}$이다.

(ii) $u=-2\sqrt{2},\ v=2$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2\sqrt{2}t+2=(t+\sqrt{2})^2=0$의 두 근이다. 따라서 $x=y=-\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $(x,\ y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$이다.

답 $(x,\ y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

연립이차방정식의 해의 조건

예제 05 다음 물음에 답하시오.

(1) x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ 3x^2+xy=-9 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오.

(2) x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2k+4 \\ xy=k^2-4 \end{cases}$ 가 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

길잡이 연립방정식에서 **한 문자를 소거하여 만든 이차방정식의 판별식**을 이용하면 연립방정식의 해의 조건을 판단할 수 있다.

(1) 일차식을 이차식에 대입하여 만든 이차방정식의 판별식을 이용한다.

(2) $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식은 x, y를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식

$$t^2-(x+y)t+xy=0$$

의 판별식을 이용한다.

풀이

(1) 일차식 $2x+y=k$에서 $y=k-2x$를 이차식 $3x^2+xy=-9$에 대입하여 정리하면

$$3x^2+x(k-2x)=-9 \quad \Rightarrow \quad x^2+kx+9=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해만 가지려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다. 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때

$$D=k^2-4\cdot 9=k^2-36=0$$

에서 $k=\pm 6$이다.

(2) $x+y=2k+4$, $xy=k^2-4$를 만족시키는 x, y를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$t^2-(2k+4)t+k^2-4=0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 주어진 연립방정식의 해가 실근이려면 이차방정식 ㉡이 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=(k+2)^2-1\cdot(k^2-4)=4k+8\geq 0$$

에서 $k\geq -2$이다.

정답 (1) $k=\pm 6$ (2) $k\geq -2$

- $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식(p.257)
- 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이(p.254)
- 이차방정식의 판별식(p.166)

돌다리 두드리기

연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ xy=4 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| $k=\pm 4$

두 수 x, y를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$t^2-kt+4=0$$

이다. 이 이차방정식은 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $t^2-kt+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D=k^2-16=0$에서 $k=\pm 4$이다.

정답 및 풀이 p.538

개념 그대로

유제 05-1

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오.

일차식 $2x-y=k$에서 $y=2x-k$를 이차식 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$$x^2+(2x-k)^2=5 \quad \Rightarrow \quad 5x^2-4kx+k^2-5=0$$

이다. 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5\cdot(k^2-5)=-k^2+25=0$$

에서 $k=\pm5$이다.

답 $k=\pm5$

개념 그대로

유제 05-2

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2k+2 \\ xy=k^2+5 \end{cases}$ 가 실근을 가지지 않을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

연립방정식 $x+y=2k+2$, $xy=k^2+5$를 만족시키는 x, y를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$t^2-(2k+2)t+k^2+5=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 주어진 연립방정식이 실근이 존재하지 않으려면 이차방정식 ㉠이 허근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1\cdot(k^2+5)=2k-4<0$$

에서 $k<2$이다.

답 $k<2$

개념 바꾸기

- $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식(p.257)
+ 방정식 $ax=b$의 풀이(p.154)

유제 05-3

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy=k+2 \\ x-y=k^2-k-6 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않을 때, k의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x^2-xy=k+2 & \cdots ㉠ \\ x-y=k^2-k-6 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 라 하자.

㉡를 정리하면 $y=x-(k^2-k-6)$이고 이를 ㉠에 대입하면

$$x^2-x\{x-(k^2-k-6)\}=k+2 \quad \Rightarrow \quad (k^2-k-6)x=k+2$$

이므로

$$(k+2)(k-3)x=k+2 \qquad \cdots ㉢$$

(i) $k\neq-2$, $k\neq3$일 때, $x=\dfrac{1}{k-3}$, $y=\dfrac{1}{k-3}-(k^2-k-6)$이다.

(ii) $k=-2$일 때, $x\cdot0=0$이므로 방정식 ㉢을 만족시키는 x가 무수히 많다. 따라서 연립방정식의 해가 무수히 많다.

(iii) $k=3$일 때, $x\cdot0=5$이므로 방정식 ㉢을 만족시키는 x가 존재하지 않는다. 따라서 연립방정식의 해가 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 연립방정식이 해를 갖지 않을 때, $k=3$이다.

답 3

08-3 부정방정식과 공통근

부정방정식

방정식은 변수의 값에 따라 참 또는 거짓이 되는 식이고, 부정(不定)은 정할 수 없음을 뜻한다. 즉, 부정방정식은 일치하는 방정식을 소거하면 미지수의 수 보다 방정식의 수가 적어서 무수히 많은 해를 가지는 방정식이다.

방정식 $xy=2$를 만족시키는 실수 x, y의 값은 무수히 많으므로 부정방정식이다. 하지만 방정식 $xy=2$의 해 중에서 자연수인 것은

$$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

의 두 쌍이다. 또한 방정식 $xy=2$의 해 중에서 정수인 것은

$$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-2,\ -1)$$

의 네 쌍이다. 이와 같이 해에 대한 조건이 주어지면 해를 확정할 수 있는 경우가 있다.

부정방정식은 문제에서 제시하는 해의 범위에 따라 다양한 풀이 방법이 있다. 이 단원에서는 몇 가지의 대표적인 풀이 방법에 대하여 알아볼 것이다.

해의 범위가 정수일 때의 풀이

방정식 $xy+2x+2=0$은 미지수의 수보다 방정식의 수가 적으므로 부정방정식이다. x, y가 정수일 때

$$(\text{다항식 } A)\times(\text{다항식 } B)=n \qquad (\text{단, } n\text{은 정수})$$

의 꼴로 식을 변형하면 두 다항식 A, B의 값은 곱해서 정수 n이 되는 두 정수와 같게 된다. 즉

$$xy+2x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x(y+2)=-2$$

처럼 변형하면 x와 $y+2$는 곱해서 -2가 되는 정수임을 알 수 있다.

x	1	2	-1	-2
$y+2$	-2	-1	2	1

$y+2$의 값으로부터 정수 x, y의 순서쌍은 다음과 같이 결정된다.

x	1	2	-1	-2
y	-4	-3	0	-1

포인트 상 8.9 **해의 범위가 정수일 때의 풀이**

해가 정수인 부정방정식은

$$(\text{다항식 } A)\times(\text{다항식 } B)=n \qquad (\text{단, } n\text{은 정수})$$

의 꼴로 바꾸고, 곱해서 정수 n이 되는 두 정수를 구하여 방정식을 푼다.

해의 범위가 자연수인 경우에도 동일하게 푼 뒤 자연수가 아닌 해는 제외한다.

보기 8.5 다음 방정식의 정수해를 구하시오.

(1) $xy+x+y+1=2$ (2) $6xy+4x-3y-7=0$

항등식의 성질을 이용한 풀이

방정식 $x+y\sqrt{2}=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값은 무수히 많지만 유리수 x, y에 대하여 $x+y\sqrt{2}=0$이면 $x=0$, $y=0$ 뿐이다. 또한 방정식 $x+yi=0$을 만족시키는 복소수 x, y의 값은 무수히 많지만 실수 x, y에 대하여 $x+yi=0$이면 $x=0$, $y=0$ 뿐이다.

이처럼 무리수가 서로 같을 조건(p.125) 또는 복소수가 서로 같을 조건(p.125)을 이용하여 방정식을 만들어서 풀 수 있다.

포인트 상 8.10 **항등식의 성질을 이용한 풀이**

항등식의 성질을 이용하여 부정방정식을 다음의 방법으로 풀 수 있다.

- 유리수 x, y와 무리수 $\sqrt{m}$에 대하여 $x+y\sqrt{m}=0$이면 $x=0$, $y=0$이다.
- 실수 x, y에 대하여 $x+yi=0$이면 $x=0$, $y=0$이다. (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기 8.6 방정식 $x+2\sqrt{3}=2+y\sqrt{3}$을 만족시키는 유리수 x, y의 값을 구하시오.

보기 8.7 방정식 $x+\sqrt{5}i=-3+yi$를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

실수의 성질을 이용한 풀이

다음 부정방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구해보자.

$$x^2+2x+1+y^2=0 \qquad \cdots(8.3.1)$$

완전제곱식의 합의 형태로 고칠 수 있는 경우 임의의 실수 A, B에 대하여 $A^2\geq 0$, $B^2\geq 0$이므로

$$A^2+B^2=0 \quad\Rightarrow\quad A=B=0$$

임을 이용한다. (8.3.1)을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 고치면

$$(x^2+2x+1)+y^2=0 \quad\Rightarrow\quad (x+1)^2+y^2=0$$

이고 $x+1$, y가 모두 실수이므로 $x+1=0$, $y=0$이다. 따라서 $x=-1$, $y=0$이다.

보기 정답

8.5 (1) $(x, y)=(0, 1), (1, 0), (-2, -3), (-3, -2)$
(2) $(x, y)=(-2, -1), (1, 1)$

8.6 $x=2$, $y=2$

8.7 $x=-3$, $y=\sqrt{5}$

완전제곱식의 합의 형태로 고치기 힘든 경우 실수 x, y 중 한 문자에 대하여 정리한 이차방정식이 실근을 가지므로 **이차방정식의 판별식**(p.166)이 $D \geq 0$임을 이용하는 풀이이다. (8.3.1)의 좌변을 x에 대하여 **내림차순으로 정리**(p.16)하면

$$x^2+2x+(y^2+1)=0 \qquad \cdots (8.3.2)$$

이다. 이때 x가 실수이므로 방정식 (8.3.2)의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(y^2+1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 \leq 0$$

에서 y도 실수이므로 $y=0$이다. $y=0$을 (8.3.2)에 대입하면 $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $x=-1$을 얻는다. 따라서 구하는 x, y의 값은 $x=-1$, $y=0$이다.

포인트 상 8.11 **실수의 성질을 이용한 풀이**

- 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.
- 실수 A, B에 대하여 $|A|+|B|=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.
- 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 판별식 $D \geq 0$임을 이용하여 푼다.

보기 8.8 다음 방정식의 실수해를 구하시오.

(1) $x^2-2x+y^2+2y+2=0$ (2) $|2x+y-1|+|x-y-2|=0$

공통근

두 이차방정식 $x^2+3x+2=0$, $x^2-x-2=0$의 근을 구해보자.

이차방정식 $x^2+3x+2=0$은 $(x+1)(x+2)=0$ 이므로 $x=-1$, -2이다.	이차방정식 $x^2-x-2=0$은 $(x-2)(x+1)=0$ 이므로 $x=-1$, 2이다.

이때 $x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+3x+2=0$, $x^2-x-2=0$을 동시에 만족시키는 근이다.

정 의 상 8.12 **공통근**

두 개 이상의 방정식을 동시에 만족시키는 미지수의 값을 **공통근**이라 한다.

방정식의 공통근을 구하는 방법은 기본적으로 각각의 방정식의 근을 직접 구한 다음 모든 방정식을 만족시키는 값을 찾으면 된다. 하지만 방정식의 계수에 미지수가 포함되면 해를 직접 구하기 어렵다. 이런 경우에는 공통근을 α로 놓고 $x=\alpha$를 대입하여 **계수에 포함된 미지수와 공통근 α에 대한 연립방정식**(p.256)의 해를 구할 수 있다.

보기 정답

8.8 (1) $x=1$, $y=-1$
(2) $x=1$, $y=-1$

이차항을 소거하는 방법

두 이차방정식 $x^2-kx+3=0$, $x^2+x-3k=0$의 공통근을 구해보자. 계수에 미지수 k가 포함되어 있어 두 방정식의 근을 직접 구하기는 어려우므로 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2-k\alpha+3=0 & \cdots(8.3.3) \\ \alpha^2+\alpha-3k=0 & \cdots(8.3.4) \end{cases}$$

이 성립한다. (8.3.3)−(8.3.4)를 하여 이차항을 소거하면 $(k+1)(3-\alpha)=0$이다.

(i) $k=-1$인 경우, 주어진 두 이차방정식은 모두 $x^2+x+3=0$이므로, 두 개의 공통근 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$를 가진다.

(ii) $\alpha=3$인 경우, 두 방정식의 공통근은 3이므로 $\alpha=3$을 (8.3.3), (8.3.4)에 대입하면 $k=4$이다. 이제 두 방정식의 나머지 근도 구해보자. $k=4$를 두 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0 & \cdots(8.3.5) \\ x^2+x-12=(x+4)(x-3)=0 & \cdots(8.3.6) \end{cases}$$

이다. 따라서 (8.3.5)의 나머지 한 근은 $x=1$이고, (8.3.6)의 나머지 한 근은 $x=-4$이다.

(i), (ii)에 의하여 두 이차방정식 $x^2-kx+3=0$, $x^2+x-3k=0$의 공통근은 $k=-1$일 때 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$이고, $k=4$일 때 $x=3$이다.

상수항을 소거하는 방법

두 이차방정식 $x^2+(k-11)x+k=0$, $2x^2-(k-2)x-k=0$의 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+(k-11)\alpha+k=0 & \cdots(8.3.7) \\ 2\alpha^2-(k-2)\alpha-k=0 & \cdots(8.3.8) \end{cases}$$

이 성립한다. (8.3.7)+(8.3.8)을 하여 상수항을 소거하면 $3\alpha(\alpha-3)=0$이다.

(i) $\alpha=0$인 경우, 두 방정식의 공통근은 0이므로 $\alpha=0$을 (8.3.7), (8.3.8)에 대입하면 $k=0$이다. $k=0$을 두 방정식에 대입하여 나머지 근도 계산하면 각각 $x=11$과 $x=-1$이다.

(ii) $\alpha=3$인 경우, 두 방정식의 공통근은 3이므로 $\alpha=3$을 (8.3.7), (8.3.8)에 대입하면 $k=6$이다. $k=6$을 두 방정식에 대입하여 나머지 근도 계산하면 각각 $x=2$와 $x=-1$이다.

(i), (ii)에 의하여 두 이차방정식 $x^2+(k-11)x+k=0$, $2x^2-(k-2)x-k=0$의 공통근은 $k=0$일 때 $x=0$이고, $k=6$일 때 $x=3$이다.

포인트 상 8.13

두 방정식의 공통근을 구하는 방법

- 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 근을 각각 구한 뒤 공통근을 찾는다.
- 공통근을 α라 하고 $x=\alpha$를 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$에 대입하여 α에 대한 연립방정식을 만든다. 이 연립방정식의 최고차항 또는 상수항을 소거하는 방법으로 공통근 α를 구한다.

이차항이나 상수항을 소거하여 얻은 방정식의 해 중에는 공통근이 아니거나 주어진 조건에 어긋날 때도 있으므로 반드시 확인이 필요하다.

부정방정식의 풀이

예제 06 다음 조건을 만족시키는 x, y의 값을 모두 구하시오.

(1) 방정식 $xy-5x-5y=0$을 만족시키는 두 자연수 x, y

(2) 방정식 $x+y+2=(x-y)\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 x, y

(3) 방정식 $x^2-4xy+5y^2+6y+9=0$을 만족시키는 두 실수 x, y

길잡이 부정방정식은 주어지는 해의 범위에 따라 풀이 방법이 다르다.

(1) **해가 정수인 부정방정식은 '(다항식 A)×(다항식 B)$=n$'** (n은 정수)의 꼴로 바꾸고, 곱해서 n이 되는 두 수를 찾아 방정식을 푼다.

(2) **유리수와 무리수, 실수와 복소수가 함께 있는 부정방정식은 '무리수가 서로 같을 조건', '복소수가 서로 같을 조건'과 같이 항등식의 성질**을 이용한다.

(3) **실수의 성질을 이용하는 부정방정식은 $A^2+B^2=0$**의 꼴로 바꾼다.

풀 이

(1) $xy-5x-5y=0$을 (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형하면

$$x(y-5)-5y=x(y-5)-5(y-5)-25=0 \quad \Rightarrow \quad (x-5)(y-5)=25$$

이다. 이때 x, y는 정수이므로 가능한 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x-5$	1	5	25	-1	-5	-25
$y-5$	25	5	1	-25	-5	-1

⇒

x	6	10	30	4	0	-20
y	30	10	6	-20	0	4

이 중에서 x, y가 모두 자연수인 해는 $(x, y)=(6, 30), (10, 10), (30, 6)$이다.

(2) 주어진 등식을 정리하면 $(x+y+2)-(x-y)\sqrt{2}=0$에서 $x+y+2$, $x-y$는 유리수이고 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+y+2=0, \quad x-y=0$$

이므로 이 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-1$이다.

(3) $x^2-4xy+5y^2+6y+9=0$을 $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형하면

$$(x^2-4xy+4y^2)+(y^2+6y+9)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2y)^2+(y+3)^2=0$$

이다. 이때 두 실수 x, y에 대하여 $x-2y$, $y+3$도 모두 실수이므로 $(x-2y)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$이다. 즉

$$x-2y=0, \quad y+3=0$$

이 성립하므로 이 두 식을 연립하여 풀면 $x=-6$, $y=-3$이다.

정답 (1) $(x, y)=(6, 30), (10, 10), (30, 6)$
(2) $(x, y)=(-1, -1)$ (3) $(x, y)=(-6, -3)$

• 실수의 성질을 이용한 풀이(p.268)
• 항등식의 성질을 이용한 풀이(p.267)
• 해의 범위가 정수일 때의 풀이(p.267)

돌다리 두드리기

다음 조건을 만족시키는 x, y의 값을 모두 구하시오.

(1) 방정식 $xy-x-3y-2=0$을 만족시키는 두 자연수 x, y

(2) 방정식 $x+3y-1=(x+y+1)\sqrt{3}$을 만족시키는 두 유리수 x, y

(1) $y(x-3)-(x-3)=(x-3)(y-1)=5$를 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 $(x, y)=(4, 6), (8, 2)$이다.
(2) $(x+3y-1)-(x+y+1)\sqrt{3}=0$에서 $x+3y-1=0$, $x+y+1=0$이므로 이 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$이다.

돌다리 두드리기
|답| (1) $(x, y)=(4, 6), (8, 2)$
(2) $(x, y)=(-2, 1)$

정답 및 풀이 p.539

개념 그대로

유제 06-1

방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$을 만족시키는 자연수 x, y의 값을 각각 구하시오.

주어진 방정식의 양변에 $3xy$를 곱해서 (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형하면

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3(x+y)=xy$$

$$\Rightarrow \quad xy-3(x+y)+9=9 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(y-3)=9$$

이다. x, y는 자연수이므로 가능한 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x-3$	1	3	9
$y-3$	9	3	1

⇓

x	4	6	12
y	12	6	4

따라서 구하는 해는 $(x, y)=(4, 12), (6, 6), (12, 4)$이다.

답 $(x, y)=(4, 12), (6, 6), (12, 4)$

개념 더하기

유제 06-2

+ 복소수의 곱셈(p.128)
+ 복소수의 덧셈과 뺄셈(p.127)

방정식 $x(1+i)^2+y(1-2i)-3=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 각각 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

주어진 식을 정리하여 $a+bi=0$의 꼴로 나타내면

$$x(1+2i+i^2)+y(1-2i)-3=0 \quad \Rightarrow \quad (y-3)+2(x-y)i=0$$

이다. $y-3$, $2(x-y)$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$y-3=0, \quad 2(x-y)=0$$

이고 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=3$이다.

답 $x=3$, $y=3$

개념 더하기

유제 06-3

+ 절댓값(p.155)

방정식 $x^2+3x+|7-y|=x-1$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 각각 구하시오.

주어진 방정식에서 절댓값 기호를 포함하지 않은 항들을 완전제곱의 꼴로 나타내면

$$x^2+3x+|7-y|=x-1 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2+|7-y|=0$$

이다. 이때 x, y는 실수이므로 $x+1$과 $7-y$ 또한 실수이다. 따라서 실수의 성질에 의하여

$$(x+1)^2 \geq 0, \quad |7-y| \geq 0$$

이므로

$$x+1=0, \quad 7-y=0$$

이다. 두 식을 각각 풀면 $x=-1$, $y=7$이다.

답 $x=-1$, $y=7$

두 방정식의 공통근 풀이

예제 07 x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+(2k+1)x-k-3=0, \quad x^2+(k+1)x+k-3=0$$

이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 k의 값과 그 때의 공통근을 구하시오.

길잡이 두 방정식의 공통근을 α라 하고, $x=\alpha$를 대입하면 α와 k의 연립이차방정식이 된다. 즉, **공통근을 구하는 것은 연립이차방정식을 푸는 것**과 같다. 따라서 최고차항을 소거하거나 상수항을 소거하여 연립이차방정식을 푼다.

풀이

1단계 각 방정식에 공통근 α를 대입한 뒤 변끼리 빼서 최고차항을 소거한다.

두 이차방정식의 공통근을 α라 하고, $x=\alpha$를 대입하면 α와 k에 대한 연립이차방정식

$$\begin{cases}\alpha^2+(2k+1)\alpha-k=3 & \cdots ㉠\\ \alpha^2+(k+1)\alpha+k=3 & \cdots ㉡\end{cases}$$

를 얻는다. 이때 ㉠$-$㉡을 하여 α^2항을 소거하면

$$k(\alpha-2)=0$$

에서 $k=0$ 또는 $\alpha=2$이다.

2단계 각 경우에 대하여 문제에서 주어진 조건들을 만족시키는 α의 값을 구한다.

(i) $k=0$인 경우, 주어진 두 이차방정식이 일치하므로 두 개의 공통근을 갖는다. 즉, 오직 하나의 공통근을 갖는다는 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $\alpha=2$인 경우, $\alpha=2$를 ㉠에 대입하면

$$4+2(2k+1)-k-3=0 \quad \Rightarrow \quad 3k=-3$$

이므로 $k=-1$이다. $k=-1$이면 주어진 두 이차방정식은 각각

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \text{ 또는 } x=-1$$
$$x^2-4=(x-2)(x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \text{ 또는 } x=-2$$

이므로 $x=2$를 오직 하나의 공통인 근으로 가진다. 따라서 $k=-1$일 때 오직 하나의 공통근을 가지고 그 때의 공통근은 2이다.

정답 $k=-1$, 공통근: 2

1 • 두 방정식의 공통근을 구하는 방법(p.269)
• 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이(p.256)

2 • 두 방정식의 공통근을 구하는 방법(p.269)
• 공통근(p.268)
• 인수분해를 통한 풀이(p.156)

돌다리 두드리기

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+(3k+2)x+3k+6=0, \quad x^2+(k+2)x-k+6=0$$

이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 k의 값과 그 때의 공통근을 모두 구하시오.

$x=\alpha$를 대입하고, 두 식을 연립하여 α^2항을 소거하면 $k(\alpha+2)=0$이므로 $k=0$ 또는 $\alpha=-2$이다. 이때 $k=0$이면 두 이차방정식이 일치하므로 두 개의 공통근을 갖는다. 따라서 $\alpha=-2$를 두 이차방정식 중 한 곳에 대입하면 $k=2$이다. $k=2$를 두 이차방정식에 대입하여 구한 공통근은 -2이다.

돌다리 두드리기
답 $k=2$, 공통근: -2

정답 및 풀이 p.539

개념 더하기

유제 07-1

+ 인수분해를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.220)

두 방정식 $x^2+5x+6=0$, $x^3+3x^2-x-3=0$의 공통근을 구하시오.

각각의 방정식을 풀면 다음과 같다.

(i) $x^2+5x+6=0$에서 $(x+2)(x+3)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=-3$이다.

(ii) $x^3+3x^2-x-3=0$을 인수분해하면

$$x^2(x+3)-(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-1)(x+3)=0$$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-3$이다.

(i), (ii)에 의하여 두 방정식의 공통근은 $x=-3$이다.

답 $x=-3$

개념 그대로

유제 07-2

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+(k+1)x-2k=0, \quad x^2-(k+3)x+2k=0$$

이 공통근을 갖도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오.

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+(k+1)\alpha-2k=0 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2-(k+3)\alpha+2k=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이다. 이때 ㉠+㉡을 하여 k가 포함된 항을 소거하면

$$2\alpha^2-2\alpha=2\alpha(\alpha-1)=0$$

이므로 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$이다. $\alpha=0$을 ㉠에 대입하면 $k=0$이고 $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $k=2$이다. 따라서 구하는 모든 k의 값의 합은 $0+2=2$이다.

답 2

개념 더하기

유제 07-3

+ 인수정리를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이(p.221)
+ 두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)

서로 다른 두 삼차방정식

$$x^3+ax^2+bx+1=0, \quad x^3+bx^2+ax+1=0$$

이 오직 하나의 공통근을 갖고 $ab=-3$일 때, 공통근 α에 대하여 $\alpha(a+b)$의 값을 구하시오.

두 삼차방정식을

$$\begin{cases} \alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots ㉠ \\ \alpha^3+b\alpha^2+a\alpha+1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하자. ㉠−㉡을 하면

$$(a-b)\alpha^2-(a-b)\alpha=0, \ (a-b)\alpha(\alpha-1)=0$$

이므로 $a=b$ 또는 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$이다.

(i) $\alpha=0$인 경우, ㉠, ㉡에 대입하면 $1=0$이므로 $\alpha=0$은 공통근이 아니다.

(ii) $a=b$인 경우, 두 삼차방정식이 일치하므로 오직 하나의 공통근을 가진다는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\alpha=1$인 경우, $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $a+b=-2$이다. 주어진 조건으로부터 $ab=-3$이므로 a, b는 두 수의 합과 곱을 계수로 하는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 근이다.

$$t^2+2t-3=0, \ (t-1)(t+3)=0 \quad \Rightarrow \quad t=1 \text{ 또는 } t=-3$$

따라서 $a=1$, $b=-3$ 또는 $a=-3$, $b=1$이다. $a=1$, $b=-3$일 때와 $a=-3$, $b=1$일 때 주어진 두 삼차방정식은

$$\begin{cases} x^3+x^2-3x+1=0 & \cdots ㉢ \\ x^3-3x^2+x+1=0 & \cdots ㉣ \end{cases}$$

이다. $f(x)=x^3+x^2-3x+1$, $g(x)=x^3-3x^2+x+1$이라 두면 $f(1)=g(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ & & 1 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

이므로

$$f(x)=(x-1)(x^2+2x-1)=0, \ g(x)=(x-1)(x^2-2x+1)$$

이다. 따라서 두 삼차방정식은 $x=1$을 하나의 공통근으로 한다.

(i), (ii), (iii)으로부터 구하는 값은 $\alpha(a+b)=1\cdot(-2)=-2$이다.

답 -2

08-1 연립일차방정식 [1-2]

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y=10 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -4x+6y=8 \end{cases}$

(1) 주어진 **연립방정식(p.249)**을 $\begin{cases} 3x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ 2x+y=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 놓자. ㉠+㉡×2를 하면

$$(3x-2y)+2(2x+y)=1+20, \quad 7x=21$$

에서 $x=3$이고 이를 다시 ㉡에 대입하면 $y=4$이다.

(2) 주어진 **연립방정식(p.249)**을 $\begin{cases} 2x-3y=-4 & \cdots ㉢ \\ -4x+6y=8 & \cdots ㉣ \end{cases}$ 이라 놓자. ㉢×(-2)를 하면 ㉣과 같은 식이므로 주어진 연립방정식은 해가 무수히 많다.

답 (1) $(x, y)=(3, 4)$ (2) 해가 무수히 많다.

08-2

연립방정식 $\begin{cases} 2x+2y-z=6 \\ x-3y+2z=3 \\ 8x+z=2 \end{cases}$ 을 푸시오.

주어진 **연립방정식(p.250)**을 $\begin{cases} 2x+2y-z=6 & \cdots ㉠ \\ x-3y+2z=3 & \cdots ㉡ \\ 8x+z=2 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 놓자.

㉠×2+㉡을 하면

$$5x+y=15 \qquad \cdots ㉣$$

이고 ㉠+㉢을 하면

$$10x+2y=8 \qquad \cdots ㉤$$

이다. 이때 ㉣×2−㉤을 하면 $0=22$이므로 x, y에 어떤 값을 대입해도 주어진 방정식을 만족시키지 못한다. 따라서 주어진 연립방정식의 해가 없다.

답 해가 없다.

08-3 연립이차방정식 [3-7]

연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+3xy+y^2=-1 \end{cases}$ 을 만족시키는 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

연립방정식(p.254) $\begin{cases} x-y=3 & \cdots ㉠ \\ x^2+3xy+y^2=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 놓자.

㉠에서 $y=x-3$을 ㉡에 대입하면

$$x^2+3x(x-3)+(x-3)^2=-1 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-2)=0$$

이다. 따라서 $x=1$ 또는 $x=2$이다. 이를 각각 ㉠에 대입하면 $y=-2$, $y=-1$이다.
즉 $(x, y)=(1, -2)$, $(2, -1)$이고 xy의 값은 두 경우 모두 -2이다.

답 -2

08-4

대각선의 길이가 25 m인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로의 길이를 2 m 늘리고, 가로의 길이를 4 m 줄이면 넓이는 12 m^2만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로, 세로의 길이의 합을 구하시오. (단, 단위는 m이다.)

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x (m), y (m)라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=25^2 & \cdots ㉠ \\ (x-4)(y+2)=xy+12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이다. 이때 x와 y는 $4<x<25$, $0<y<25$를 만족해야 한다. 한편, ㉡을 정리하면

$$2x-4y=20, \quad x=2y+10$$

를 얻고, $x=2y+10$을 ㉠에 **대입하여 x를 소거하면(p.254)**

$$(2y+10)^2+y^2=25^2 \quad \Rightarrow \quad (y+15)(y-7)=0$$

에서 $y=7$ 또는 $y=-15$이다. 이때 $y>0$이므로 $y=7$이고 이를 $x=2y+10$에 대입하면 $x=24$이다. 따라서 처음 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 24 m, 7 m이므로 가로, 세로의 길이의 합은 $24+7=31$ (m)이다.

답 31

08-5

연립방정식 $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

연립방정식을 $\begin{cases} x^2+xy=12 & \cdots ㉠ \\ xy+y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 놓자.

㉠−㉡×3을 하여 **상수항을 소거하면(p.256)**

$$x^2-2xy-3y^2=(x+y)(x-3y)=0$$

이다. 따라서 $x=-y$ 또는 $x=3y$이다.

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하면

$$(-y)^2+(-y)\cdot y=12 \quad \Rightarrow \quad 0=12$$

에서 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면

$$(3y)^2+3y\cdot y=12 \quad \Rightarrow \quad y=\pm1$$

에서 $x=3y$이므로 $x=\pm3$, $y=\pm1$(복호동순)이다.

(i), (ii)에서 $(x, y)=(-3, -1)$, $(3, 1)$이므로 구하는 값은 $\alpha^2+\beta^2=9+1=10$

답 10

08-6

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a-8 \\ xy=a^2+4 \end{cases}$ 의 실근이 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

연립방정식(p.257) $\begin{cases} x+y=2a-8 & \cdots ㉠ \\ xy=a^2+4 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 놓으면 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x, y**를 두 근으로 하는, t에 대한 이차방정식(p.171)**은

$$t^2-(2a-8)t+a^2+4=0 \qquad \cdots ㉢$$

의 두 근이다. 주어진 연립방정식의 실근이 존재하지 않으려면 t에 대한 이차방정식 ㉢의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=\{-(a-4)\}^2-(a^2+4)=-8a+12<0$$

을 만족해야 한다. 즉, $a>\frac{3}{2}$일 때, 주어진 연립방정식의 실근이 존재하지 않는다.

답 $a>\frac{3}{2}$

08-7

연립방정식 $\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x+y$의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식은 $x+y$, xy**로 표현가능한 연립이차방정식(p.257)**이므로 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=3$이고

$\begin{cases} u+v=-1 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$이라 할 수 있다. ㉠에서 $v=-u-1$이므로 ㉡에 대입하면

$$u^2-(-u-1)=u^2+u+1=3 \quad \Rightarrow \quad (u+2)(u-1)=0$$

이므로 $u=-2$ 또는 $u=1$이다. 이를 ㉠에 각각 대입하면 $v=1$, $v=-2$이다.

(i) $u=-2$, $v=1$일 때, $x+y=-2$, $xy=1$이므로 x, y를 t에 대한 **이차방정식(p.156)** $t^2+2t+1=0$의 두 근이라 하면 $(t+1)^2=0$에서 $t=-1$이다. 즉, $x=-1$, $y=-1$이다.

(ii) $u=1$, $v=-2$일 때, $x+y=1$, $xy=-2$이므로 x, y를 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-2=0$의 두 근이라 하면 $(t-2)(t+1)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=-1$이므로 $(x, y)=(-1, 2)$ 또는 $(x, y)=(2, -1)$이다.

(i), (ii)에서 $2x+y$의 최댓값은 $(x, y)=(2, -1)$일 때, 3이다.

답 3

08-8 부정방정식과 공통근 [8-12]

등식 $(x-y)i^{10}+(x^2-y)i^5=6$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

허수단위 i의 거듭제곱의 성질(p.139)에서 $i^4=1$이므로 $i^{10}=-1$, $i^5=i$이다. 따라서 주어진 등식을 변형하면

$$-(x-y)+(x^2-y)i=6 \quad \Rightarrow \quad (y-x-6)+(x^2-y)i=0$$

이다. 이때, x y가 실수이므로 **복소수가 서로 같을 조건(p.125)**에 의하여

$$y-x-6=0 \quad \Rightarrow \quad y=x+6 \qquad \cdots ㉠$$

$$x^2-y=0 \quad \Rightarrow \quad y=x^2 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=3$이다. 이를 다시 ㉠에 대입하면 $y=4$ 또는 $y=9$이다. 따라서 $(x, y)=(-2, 4)$, $(3, 9)$이다.

답 $(x, y)=(-2, 4)$, $(3, 9)$

08-9

x에 대한 이차방정식 $x^2-mx+m-3=0$의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 상수 m의 값을 모두 구하시오.

두 **정수근(p.267)**을 α, β라 하면 **이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)**로부터

$$\alpha+\beta=m \qquad \cdots ㉠$$

$$\alpha\beta=m-3 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉡−㉠에서 $\alpha\beta-\alpha-\beta=-3$이고 좌변을 두 일차식의 곱으로 나타내면

$$\alpha(\beta-1)-\beta+1=(\alpha-1)(\beta-1)=-2$$

이다. α, β가 정수이면 $\alpha-1$, $\beta-1$도 정수이므로 가능한 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\alpha-1$	2	-2	1	-1
$\beta-1$	-1	1	-2	2
		$\Downarrow$		
α	3	-1	2	0
β	0	2	-1	3
		$\Downarrow$		
$m=\alpha+\beta$	3	1	1	3

따라서 구하는 상수 m의 값은 $m=1$ 또는 $m=3$이다.

답 $m=1$ 또는 $m=3$

08-10

방정식 $|x^2-9y|+(x-2y+2)^2=0$의 해를 구하시오.

두 실수 x, y에 대하여 x^2-9y, $x-2y+2$도 모두 실수이므로

$$|x^2-9y|\ge 0, \quad (x-2y+2)^2\ge 0$$

이다. 즉, 구하는 x, y는 다음 **연립이차방정식(p.254)**

$$\begin{cases} x^2-9y=0 & \cdots ㉠ \\ x-2y+2=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해과 같다. ㉡에서 $x=2y-2$이고 이를 ㉠에 대입하면

$$(2y-2)^2-9y=4y^2-17y+4=0 \quad \Rightarrow \quad (4y-1)(y-4)=0$$

이므로 $y=\frac{1}{4}$ 또는 $y=4$이다. 이를 다시 ㉡에 각각 대입하면 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=6$이다. 따라서 $(x, y)=\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $(6, 4)$이다.

답 $(x, y)=\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $(6, 4)$

08-11

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+mx+2m+2=0, \quad x^2-x+m+1=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 실수 m의 값을 구하시오.

두 이차방정식의 **공통근(p.268)**을 α라 하면 $\begin{cases} \alpha^2+m\alpha+2m+2=0 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2-\alpha+m+1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$이다. ㉠−㉡**을 하여 이차항을 소거하면(p.269)**

$$(m+1)\alpha+m+1=0 \quad \Rightarrow \quad (m+1)(\alpha+1)=0$$

에서 $m=-1$ 또는 $\alpha=-1$이다.

(i) $m=-1$일 때 주어진 두 **이차방정식(p.156)**이 일치하므로 단 하나의 공통근을 가진다는 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$일 때 ㉡에 $\alpha=-1$을 대입하면

$$(-1)^2-(-1)+m+1=0 \quad \Rightarrow \quad m=-3$$

이다. $m=-3$을 대입하면 두 이차방정식은 $x^2-3x-4=0$, $x^2-x-2=0$이고 공통근은 $x=-1$뿐이다.

따라서 구하는 상수 m의 값은 $m=-3$이다.

답 -3

08-12

x에 대한 두 이차방정식 $x^2+5x+3m=0$, $x^2+4x+2m=1$이 공통근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 곱을 구하시오.

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면 $\begin{cases} \alpha^2+5\alpha+3m=0 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha+2m=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$이다. ㉠−㉡을 **하여 이차항을 소거하면(p.269)**

$$\alpha+m=-1$$

이므로 $\alpha=-m-1$을 ㉠에 대입하면

$$(-m-1)^2+5(-m-1)+3m=0 \quad \Rightarrow \quad m^2=4$$

에서 $m=2$ 또는 $m=-2$이다.

(i) $m=2$일 때, 두 이차방정식 $x^2+5x+6=0$, $x^2+4x+3=0$의 공통근은 $\alpha=-3$이다.

(ii) $m=-2$일 때, 두 이차방정식 $x^2+5x-6=0$, $x^2+4x-5=0$의 공통근은 $\alpha=1$이다.

(i), (ii)에 의하여 m의 값의 곱은 $2\cdot(-2)=-4$이다.

답 -4

08-1

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+4y=-4(k+1) \\ xy-k^2+7=0 \end{cases}$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

주어진 **연립방정식(p.257)**을 $\begin{cases} x+4y=-4(k+1) & \cdots ㉠ \\ xy=k^2-7 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 놓으면 ㉡에서

$x\cdot 4y=4k^2-28$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x, $4y$를 **두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식(p.171)**은

$$t^2+4(k+1)t+4k^2-28=0 \quad \cdots ㉢$$

이다. 주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉢의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=4(k+1)^2-4k^2+28=8k+32\ge 0$$

을 만족시켜야 한다. 즉, $k\ge -4$일 때, 주어진 연립방정식이 해를 갖는다.

[다른 풀이]
㉠에서 $x=-4y-4k-4$를 ㉡에 대입하면 $(-4y-4k-4)y-k^2+7=0$이고 정리하면

$$4y^2+2(2k+2)y+k^2-7=0 \quad \cdots ㉣$$

이다. 주어진 연립방정식이 실근을 가져야하므로 이차방정식 ㉣이 실근을 가져야한다. 따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k+2)^2-4(k^2-7)=8k+32\ge 0 \quad \Rightarrow \quad k\ge -4$$

이므로 구하는 k의 값의 범위는 $k\ge -4$이다.

답 $k\ge -4$

08-2

방정식 $x^2+y^2-4x-2y-5=0$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 xy의 최댓값을 구하시오.

방정식 $x^2+y^2-4x-2y-5=0$을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x-2)^2+(y-1)^2=10$$

이다. x, y가 **정수(p.267)**이므로

$$(x-2)^2=1, \quad (y-1)^2=9$$

또는

$$(x-2)^2=9, \quad (y-1)^2=1$$

의 2가지 경우가 있다.

(i) $(x-2)^2=1$, $(y-1)^2=9$를 만족시키는 정수 x, y에 대하여
$$(x, y)=(1, -2), (1, 4), (3, -2), (3, 4)$$
(ii) $(x-2)^2=9$, $(y-1)^2=1$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여
$$(x, y)=(-1, 0), (-1, 2), (5, 0), (5, 2)$$

(i), (ii)로부터 xy의 최댓값은 $x=3$, $y=4$일 때 12이다.

답 12

08-3

실수 x, y가 $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+5=0$을 만족시킬 때, $x-y$의 값을 구하시오.

주어진 방정식을 **완전제곱식의 꼴로 나타내면(p.268)**

$$(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x+2y)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=0$$

이다. 세 수 $x+2y$, $x-2$, $y+1$는 실수이므로

$$x+2y=0, \quad x-2=0, \quad y+1=0$$

이다. 위의 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$이고 구하는 값은 $x-y=3$이다.

[다른 풀이]
주어진 방정식의 좌변을 x에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하면

$$2x^2+2(2y-2)x+5y^2+2y+5=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다. 이차방정식 ㉠의 **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2y-2)^2-2(5y^2+2y+5)$$
$$=-6y^2-12y-6=-6(y+1)^2\ge 0$$

이다. y가 실수이므로 $y=-1$이다. 이를 ㉠에 대입하면

$$2x^2-8x+8=0, \ 2(x-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

이다. 따라서 구하는 값은 $x-y=2-(-1)=3$이다.

답 3

08-4

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ 을 푸시오.

주어진 **연립방정식(p.257)**에서 $x+y=u$, $xy=v$라 하면

$\begin{cases} u^2-2v+u=2 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 로 u, v에 대한 연립방정식으로 나타낼 수 있다. ㉠$-$㉡$\times 2$를 하여 v를 소거하면

$$u^2-2v+u-2(u^2-v)=2-2 \quad \Rightarrow \quad u(u-1)=0$$

이므로 $u=0$ 또는 $u=1$이다. $v=u-1$이므로 $u=0$일 때 $v=-1$이고 $u=1$일 때 $v=0$이다.

(i) $u=0$, $v=-1$일 때 x, y를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인, t에 대한 이차방정식은
$$t^2+0\cdot t-1=(t-1)(t+1)=0$$
이므로 $(x, y)=(1, -1), (-1, 1)$이다.

(ii) $u=1$, $v=0$일 때 x, y를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인, t에 대한 이차방정식은
$$t^2-t+0=t(t-1)=0$$
이므로 $(x, y)=(0, 1), (1, 0)$이다.

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$(x, y)=(1, -1), (-1, 1), (0, 1), (1, 0)$$

답 $(x, y)=(1, -1), (-1, 1), (0, 1), (1, 0)$

08-5

방정식 $x^2y^2+x^2+9y^2-8xy+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하시오.

주어진 방정식을 **완전제곱식의 꼴로 변형하면(p.268)**

$$\begin{aligned}&(x^2y^2-2xy+1)+(x^2-6xy+9y^2)\\&=(xy-1)^2+(x-3y)^2=0\end{aligned}$$

이다. 이때 x, y는 **실수(p.268)**이므로 $xy=1$, $x=3y$이다. $x=3y$를 $xy=1$에 대입하면

$$3y\cdot y=3y^2=1 \quad \Rightarrow \quad y^2=\frac{1}{3}$$

이다. $x=3y$에서 양변을 제곱하면 $x^2=9y^2=9\cdot\frac{1}{3}=3$이므로 구하는 값은 $x^2+y^2=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$이다.

[다른 풀이]
주어진 방정식의 좌변을 y에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하면

$$(x^2+9)y^2-8xy+x^2+1=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. y가 실수이므로 y에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다. 이차방정식 ㉠의 **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-4x)^2-(x^2+9)(x^2+1)\\&=-x^4+6x^2-9=-(x^2-3)^2\geq 0\end{aligned}$$

이다. x가 실수이므로 $x^2=3$에서 $x=\pm\sqrt{3}$이다. 이를 ㉠에 대입하면

$$12y^2\mp 8\sqrt{3}y+4=0,\ (2\sqrt{3}y\mp 2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ (복호동순)}$$

$(x,\ y)=\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$이므로 구하는 값은 $x^2+y^2=\frac{10}{3}$이다.

답 $\frac{10}{3}$

08-6

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases}2x-y=5\\x^2-2y=k\end{cases}$가 오직 한 쌍의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$를 가질 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

$2x-y=5$에서 $y=2x-5$이므로 이를 $x^2-2y=k$에 대입하여 **y를 소거하면(p.254)**

$$x^2-2(2x-5)=k \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+10-k=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다. 따라서 이차방정식 ㉠의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0$$

에서 $k=6$이다. 즉, 이차방정식 $x^2-4x+4=0$을 풀면 $x=2$이므로 $\alpha=2$이고

$$y=2\cdot 2-5=-1$$

에서 $\beta=-1$이다. 따라서 구하는 값은 $\alpha+\beta+k=2+(-1)+6=7$이다.

답 7

08-7

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases}4x+3y=kx+2\\x+2y=ky-2\end{cases}$의 해가 존재하지 않을 때의 k의 값을 α, 무수히 많을 때의 k의 값을 β라 하자. $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

$4x+3y=kx+2$에서 $(4-k)x+3y=2\cdots$ ㉠이고, $x+2y=ky-2$에서 $x+(2-k)y=-2\cdots$ ㉡이다. 이때 ㉠$\times(2-k)-$㉡$\times 3$을 하여 **y를 소거하면(p.249)**

$$\begin{aligned}\{(4-k)(2-k)-3\}x&=2(2-k)+6\\(k^2-6k+5)x&=-2(k-5)\\(k-1)(k-5)x&=-2(k-5)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $k=1$이면 $0\cdot x=8$이므로 해가 존재하지 않고, $k=5$이면 $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많으므로 $\alpha=1$, $\beta=5$이다. 따라서 구하는 값은 $\alpha+\beta=6$이다.

답 6

08-8

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+2ax+b=0, \quad x^2+bx+2a=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가지고, 공통근이 아닌 나머지 두 근에 대하여 한 근이 나머지 한 근의 2배이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고 $b>-\frac{1}{2}$이다.)

두 이차방정식의 **공통근(p.268)**을 α라 하면 $\begin{cases}\alpha^2+2a\alpha+b=0 & \cdots ㉠\\\alpha^2+b\alpha+2a=0 & \cdots ㉡\end{cases}$이다.

㉠$-$㉡을 하여 **최고차항을 소거하면(p.269)**

$$(2a-b)\alpha-(2a-b)=(2a-b)(\alpha-1)=0$$

이므로 $b=2a$ 또는 $\alpha=1$이다.

(i) $b=2a$일 때, 두 이차방정식이 일치하므로 두 개의 공통근을 갖는다.

(ii) $\alpha=1$일 때, ㉠에 대입하면 $1+2a+b=0$에서 $b=-(2a+1)$이다. 이를 두 이차방정식에 대입하면 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$은

$$x^2+2ax-(2a+1)=(x-1)(x+2a+1)=0$$

이므로 $x=1$ 또는 $x=-2a-1$이다. 또한, 이차방정식 $x^2+bx+2a=0$은

$$x^2-(2a+1)x+2a=(x-1)(x-2a)=0$$

이므로 $x=1$ 또는 $x=2a$이다. 따라서 공통근이 아닌 근은 $-2a-1$, $2a$이다.

i) $-2a-1=2\cdot 2a$일 때, $a=-\frac{1}{6}$이므로 $b=-2a-1=-\frac{2}{3}$이다. 이때 조건의 $b>-\frac{1}{2}$을 만족시키지 못한다.

ii) $2\cdot(-2a-1)=2a$일 때, $a=-\frac{1}{3}$이므로 $b=-2a-1=-\frac{1}{3}$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $a+b=-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$이다.

답 $-\frac{2}{3}$

09 여러 가지 부등식

정의 & 포인트 확인

- 부등식의 기본 성질
- 부등식 $ax>b$의 풀이
- 연립부등식
- 연립부등식의 해
- 연립일차부등식의 풀이
- 절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 풀이
- 절댓값 기호를 2개 이상 포함한 부등식의 풀이

- 이차함수의 그래프와 이차부등식의 관계
- 이차부등식의 해
- 이차부등식이 항상 성립할 조건
- 해가 주어진 이차부등식

- 연립이차부등식
- 연립이차부등식의 풀이
- 이차방정식의 실근의 부호
- 이차방정식의 근과 실수 p의 위치 관계
- 이차방정식의 근과 두 실수 p, q의 위치 관계

09-1 연립일차부등식

부등식

부등호

네 가지 부등호 $>$, $<$, $\geq$, $\leq$의 의미는 다음과 같다.

- $A > B$: A가 B보다 크다.
- $A < B$: A가 B보다 작다.
- $A \geq B$: A가 B보다 크거나 같다.
- $A \leq B$: A가 B보다 작거나 같다.

$5x \geq 7$, $2 < 6$ 등과 같이 부등호 $>$, $<$, $\geq$, $\leq$를 사용하여 수나 식의 대소관계를 나타낸 식을 부등식이라 한다. 부등식에서 부등호를 기준으로 왼쪽 부분을 좌변, 오른쪽 부분을 우변이라 하고 좌변과 우변을 통틀어 양변이라 한다. 허수는 두 수의 대소 비교가 불가능하므로 부등식에 포함된 문자와 식은 실수 범위에서 생각하기로 한다.

부등식에서 가장 기본이 되는 성질을 알아보자.

- 부등식 $2 < 6$의 양변에 1을 더하거나 빼면

$$2+1 < 6+1, \qquad 2-1 < 6-1$$

로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

- 부등식 $2 < 6$의 양변에 양수 2를 곱하거나 나누면

$$2 \times 2 < 6 \times 2, \qquad 2 \div 2 < 6 \div 2$$

로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

- 부등식 $2 < 6$의 양변에 음수 -2를 곱하거나 나누면

$$2 \times (-2) > 6 \times (-2), \qquad 2 \div (-2) > 6 \div (-2)$$

로 부등호의 방향이 바뀐다.

실수의 대소 관계

두 실수 a, b에 대하여

- 두 수 a, b는

$$a > b,\ a = b,\ a < b$$

중 하나가 성립한다.
- $a \leq b$이고 $a \geq b$이면 $a = b$이다.

포인트 상 9.1 **부등식의 기본 성질**

실수 a, b, c에 대하여

- $a < b$이고 $b < c$이면 $a < c$이다.
- $a < b$이면 $a+c < b+c$, $a-c < b-c$이다.
- $a < b$이고 $c > 0$이면 $ac < bc$, $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$이다.
- $a < b$이고 $c < 0$이면 $ac > bc$, $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$이다.

부등식 $ax>b$의 풀이

부등식 $5x \geq 7$의 우변을 좌변으로 이항하면 $5x-7 \geq 0$이 되고, 좌변 $5x-7$은 일차식이다. 이와 같이 부등식의 기본 성질을 이용하여 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하였을 때

$$ax+b>0, \quad ax+b \geq 0, \quad ax+b<0, \quad ax+b \leq 0$$

과 같이 x에 대한 일차식의 꼴로 나타낼 수 있는 부등식을 x에 대한 일차부등식이라 한다. 부등식이 참이 되게 하는 x의 값을 부등식의 해라 하며, 부등식의 해를 모두 구하는 것을 부등식을 푼다고 한다.

$ax+b$가 x에 대한 일차식이라는 것은 $a \neq 0$임을 가정한다.

부등식의 기본 성질(p.280)을 이용하여 x에 대한 부등식 $ax>b$를 풀어보자. 이 부등식의 해는 a, b의 값에 따라 세 가지의 꼴이 있다.

- $a>0$일 때, 양변을 a로 나누면 $x>\frac{b}{a}$이다.
- $a<0$일 때, 양변을 a로 나누면 $x<\frac{b}{a}$이다.
- $a=0$일 때, 부등식은 $0 \cdot x>b$이고
  - (i) $b<0$이면 x에 어떠한 값을 대입하여도 항상 부등식이 성립한다. 즉 해는 모든 실수이다.
  - (ii) $b \geq 0$이면 x에 어떠한 값을 대입하여도 부등식이 성립하지 않는다. 즉 해가 없다.

포인트 상 9.2 **부등식 $ax>b$의 풀이**

x에 대한 부등식 $ax>b$의 해는 다음과 같다.

- $a>0$일 때, $x>\frac{b}{a}$
- $a<0$일 때, $x<\frac{b}{a}$
- $a=0$일 때, (i) $b<0$이면 해는 모든 실수이다.
  (ii) $b \geq 0$이면 해가 없다.

예시 x에 대한 부등식 $ax>a-1$을 풀어보자.

(i) $a>0$일 때, 양변을 a로 나누면

$$x>\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}$$

(ii) $a<0$일 때, 양변을 a로 나누면

$$x<\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}$$

(iii) $a=0$일 때, 부등식은 $0 \cdot x>-1$이므로 항상 성립한다. 따라서 해는 모든 실수이다.

연립일차부등식

두 개의 부등식 $3x-2\leq 10$, $5-x<6$을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 구하는 문제는 두 부등식을 쌍으로 묶어

$$\begin{cases} 3x-2\leq 10 \\ 5-x<6 \end{cases}$$

과 같이 표현한다. 이와 같이 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 연립부등식이라 한다.

정 의 상 9.3 **연립부등식**

두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 **연립부등식**이라 한다. 또한 연립부등식의 모든 부등식이 일차부등식인 경우 **연립일차부등식**이라 한다.

연립부등식의 각각의 부등식을 동시에 만족시키는 미지수의 값 또는 범위를 연립부등식의 해라 하고, 연립부등식의 모든 해를 구하는 것을 연립부등식을 푼다고 한다. 연립부등식을 풀 때에는 각각의 부등식의 해를 수직선 위에 함께 나타낸 후, 공통범위를 찾으면 된다.

정 의 상 9.4 **연립부등식의 해**

연립부등식의 각각의 부등식을 동시에 만족시키는 미지수의 값 또는 범위를 **연립부등식의 해**라 하고, 연립부등식의 모든 해를 구하는 것을 **연립부등식을 푼다**고 한다.

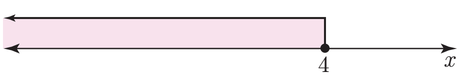
다음 연립일차부등식

$$\begin{cases} 3x-2\leq 10 & \cdots(9.1.1) \\ 5-x<6 & \cdots(9.1.2) \end{cases}$$

을 풀어보자.

수직선에서 부등식의 해를 나타낼 때 ●은 그 값을 포함하고, ○은 그 값을 포함하지 않는다.

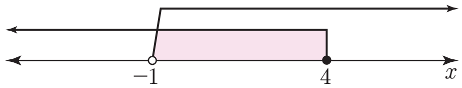
- (9.1.1)을 풀어 그 해를 수직선 위에 나타낸다. 부등식의 해는 $3x\leq 12$에서 $x\leq 4$이므로 그림과 같다.



이 책에서는 경계를 포함하는 부등식의 해를 수직으로 꺾인 선으로, 경계를 포함하지 않는 부등식의 해를 비스듬히 꺾인 선으로 나타내기로 한다.

- (9.1.2)를 풀어 그 해를 수직선 위에 나타낸다. 부등식의 해는 $-x<1$에서 $x>-1$이므로 그림과 같다.

- 두 부등식의 해를 수직선 위에 함께 나타내어 공통범위를 찾는다. 수직선에서 두 부등식의 공통범위는 $-1<x\le 4$이고, 이는 두 부등식을 동시에 만족한다.



$A<B<C$의 꼴인 연립부등식

$x-3<2x+1<x+3$의 꼴인 연립일차부등식은 두 개의 일차부등식

$$x-3<2x+1, \qquad 2x+1<x+3$$

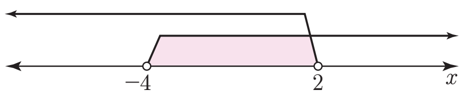
를 하나의 식으로 나타낸 것이므로 연립일차부등식

$$\begin{cases} x-3<2x+1 & \cdots (9.1.3) \\ 2x+1<x+3 & \cdots (9.1.4) \end{cases}$$

의 꼴로 고쳐서 푼다.

- (9.1.3)을 풀면 $x-3<2x+1$에서 $-x<4$이므로 $x>-4$이다.
- (9.1.4)를 풀면 $2x+1<x+3$에서 $x<2$이다.

따라서 공통범위를 구하면 $-4<x<2$이다.



포인트 상 9.5 **연립일차부등식의 풀이**

- 연립일차부등식의 각각의 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸다.
- 공통인 범위를 찾아 부등호를 사용하여 나타낸다.
- $A<B<C$의 꼴인 연립부등식은

$$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$$

로 바꾸어 푼다.

보기 9.1 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+1\le 3 \\ x>-1 \end{cases}$ (2) $-1\le 2x+3\le x+5$

$A<B<C$의 꼴인 연립부등식을 변형할 때,

$$\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$$

또는

$$\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$$

의 꼴로 고치지 않도록 주의해야 한다.

보기 정답

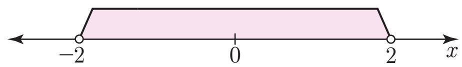
9.1 (1) $-1<x\le 1$
(2) $-2\le x\le 2$

절댓값을 포함한 일차부등식

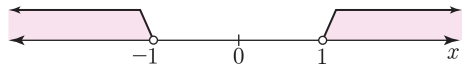
절댓값 기호를 1개 포함한 부등식

절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 경우 절댓값(p.155)의 정의를 이용하여 간단히 풀 수 있다. 두 부등식 $|x|<2$, $|x|>1$을 풀어보자.

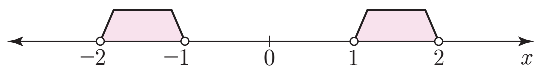
- 부등식 $|x|<2$를 만족시키는 x는 원점으로부터 x까지의 거리가 2보다 작아야 하므로 x의 값의 범위는 그림과 같다. 따라서 $-2<x<2$이다.



- 부등식 $|x|>1$을 만족시키는 x는 원점으로부터 x까지의 거리가 1보다 커야 하므로 x의 값의 범위는 그림과 같다. 따라서 $x>1$ 또는 $x<-1$이다.



또한 부등식 $1<|x|<2$를 만족시키는 x는 원점으로부터 x까지의 거리가 1보다 크고 2보다 작아야 하므로 구하는 x의 값의 범위는 그림과 같다. 따라서 $-2<x<-1$ 또는 $1<x<2$이다.



같은 방법으로 부등식 $|2x-6|<2$를 풀 수 있다. 부등식 $|2x-6|<2$를 만족시키는 $2x-6$은 원점으로부터 $2x-6$까지의 거리가 2보다 작아야하므로 구하는 $2x-6$의 값의 범위는 $-2<2x-6<2$이고, 이는 연립부등식

$$\begin{cases} -2<2x-6 \\ 2x-6<2 \end{cases}$$

와 같다. 이 연립부등식을 풀면 해는 $2<x<4$이다.

포인트 상 9.6 **절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 풀이**

$0<a<b$에 대하여

- $|x|<a$이면 $-a<x<a$이다.
- $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$이다.
- $a<|x|<b$이면 $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$이다.

$|2x+1|<x+3$과 같은 부등식도 절댓값 기호를 1개 포함하고 있으므로

$$-x-3<2x+1<x+3$$

과 같이 변형하여 풀면 $-\frac{4}{3}<x<2$이다.

보기 9.2 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x|<2$ (2) $|x|>3$ (3) $4<|x|<5$

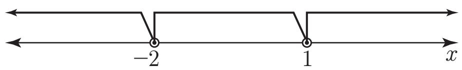
보기 정답

9.2 (1) $-2<x<2$
(2) $x<-3$ 또는 $x>3$
(3) $-5<x<-4$ 또는 $4<x<5$

절댓값 기호를 2개 이상 포함한 부등식

절댓값 기호를 2개 이상 포함한 부등식의 경우, **절댓값(p.155)**의 정의만을 이용하여 간단히 풀기 어렵다.

부등식 $|x+2|+|x-1|<7$을 풀어보자. 식 $x+2$와 $x-1$을 각각 0이 되도록 하는 x의 값이 $x=-2$, $x=1$이므로 x의 값의 범위를 $x<-2$, $-2\leq x<1$, $x\geq 1$로 나누어 푼다.



이때 x의 값의 범위에 따라 **절댓값과 부호(p.155)**를 이용하여 절댓값 기호를 없앤 뒤, 식을 정리하여 해를 구한다.

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$$|x+2|+|x-1|=-(x+2)-(x-1)=-2x-1<7$$

과 같다. 이 부등식을 풀면 $x>-4$이다. 따라서 $x<-2$와 $x>-4$의 공통범위는 $-4<x<-2$이다.

(ii) $-2\leq x<1$일 때, $x+2\geq 0$, $x-1<0$이므로

$$|x+2|+|x-1|=(x+2)-(x-1)=3<7$$

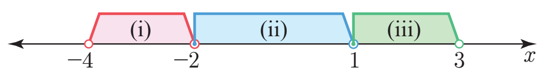
과 같다. 즉, $-2\leq x<1$ 범위에서 부등식이 항상 성립한다.

(iii) $x\geq 1$일 때, $x+2>0$, $x-1\geq 0$이므로

$$|x+2|+|x-1|=x+2+x-1=2x+1<7$$

과 같다. 이 부등식을 풀면 $x<3$이다. 따라서 $x\geq 1$과 $x<3$의 공통범위는 $1\leq x<3$이다.

(i), (ii), (iii)에서 범위별로 구한 해를 모두 합하면 부등식의 해는 $-4<x<3$이다.



포인트 상 9.7 **절댓값 기호를 2개 이상 포함한 부등식의 풀이**

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 부등식을 풀고, 각각의 해를 모두 합한다.

보기 9.3 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-1|+|x-2|<3$ (2) $|x|+|x-2|<-x+5$

$x\leq -2$, $-2<x\leq 1$, $x>1$ 등으로 범위를 나누어도 상관없다.

보기 정답

9.3 (1) $0<x<3$
(2) $-3<x<\frac{7}{3}$

예제 01

x에 대한 부등식 $(a-b)x<a+2b$의 해가 $x<3$일 때, x에 대한 부등식 $ax>8b$를 만족시키는 자연수 x의 최솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

길잡이 부등식 $ax>b$의 해는 다음과 같다.

- $a>0$일 때, $x>\frac{b}{a}$
- $a<0$일 때, $x<\frac{b}{a}$
- $a=0$일 때, (i) $b<0$이면 해는 모든 실수이다.
  (ii) $b\geq 0$이면 해가 없다.

풀 이

1단계 문제에서 주어진 조건으로부터 a의 부호를 결정한다.

1 • 부등식 $ax>b$의 풀이(p.281)

x에 대한 부등식 $(a-b)x<a+2b$의 해가 $x<3$이려면 $a-b>0$이고 $\frac{a+2b}{a-b}=3$이어야 한다. 즉,

$$a+2b=3a-3b$$

이므로 $b=\frac{2}{5}a$이다. 한편,

$$a-b=a-\frac{2}{5}a=\frac{3}{5}a>0$$

이므로 $a>0$이다.

2단계 부등식의 성질을 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

2 • 부등식의 기본 성질(p.280)

$a>0$이므로, $ax>8b$에서

$$x>\frac{8b}{a}=\frac{8}{a}\cdot\frac{2}{5}a=\frac{16}{5}$$

이다. 이를 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 4이다.

정답 4

돌다리 두드리기

x에 대한 부등식 $(4a+b)x<-2a+b$의 해가 $x>-2$일 때, x에 대한 부등식 $ax<-b$를 만족시키는 자연수 x의 최솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

돌다리 두드리기

|답| 3

$4a+b<0$이고 $\frac{-2a+b}{4a+b}=-2$ 에서 $b=-2a$이고 따라서 $a<0$이다.
$b=-2a$를 $ax<-b$에 대입하면 $ax<2a$에서 $x>2$이므로 자연수 x의 최솟값은 3이다.

정답 및 풀이 p.544

개념 그대로

유제 01-1

x에 대한 부등식 $ax-b>0$의 해가 $x<3$일 때, x에 대한 부등식 $bx-3a+2b>0$을 푸시오.
(단, a, b는 상수이다.)

$ax-b>0$, 즉 $ax>b$의 해가 $x<3$이므로

$$a<0 \quad \cdots ㉠$$

$$\frac{b}{a}=3 \quad \Rightarrow \quad b=3a \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉡을 x에 대한 부등식 $bx-3a+2b>0$에 대입하면

$$3ax-3a+6a>0 \quad \Rightarrow \quad 3ax>-3a$$

이고 ㉠에서 $a<0$이므로 양변을 $3a$로 나누면 주어진 부등식의 해는 $x<-1$이다.

답 $x<-1$

개념 그대로

유제 01-2

x에 대한 부등식 $ax+2a>a^2+2x$를 푸시오. (단, a는 상수이다.)

주어진 부등식을 정리하면

$$ax-2x>a^2-2a \quad \Rightarrow \quad (a-2)x>a(a-2)$$

이다. $a-2$의 부호에 따라 주어진 부등식의 해는 다음과 같다.

(i) $a-2>0$, 즉 $a>2$일 때, $x>a$이다.
(ii) $a-2<0$, 즉 $a<2$일 때, $x<a$이다.
(iii) $a-2=0$, 즉 $a=2$일 때, $0\cdot x>0$이므로 해는 없다.

답 $a>2$일 때, $x>a$
$a<2$일 때, $x<a$
$a=2$일 때, 해는 없다.

개념 더하기

유제 01-3

+ 인수분해 공식 I(p.81)

x에 대한 부등식 $(a^2+3a-4)x \geq -2a+1$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, 실수 a의 값을 구하시오.

$a^2+3a-4=(a+4)(a-1)$이므로 주어진 부등식은

$$(a-1)(a+4)x \geq -2a+1$$

이다. 이 부등식이 모든 실수 x에 대해 성립하려면

$$(a-1)(a+4)=0 \quad \cdots ㉠$$

$$-2a+1 \leq 0 \quad \cdots ㉡$$

이 성립해야한다.

(i) ㉠에서 $(a-1)(a+4)=0$이면 $a=-4$ 또는 $a=1$이다.
(ii) ㉡에서 $-2a+1 \leq 0$이면 $a \geq \frac{1}{2}$이다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 1이다.

답 1

연립일차부등식

예제 02 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3(2-x)<x-2 & \cdots ㉠ \\ x-1\le -x+7 & \cdots ㉡ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-3\le -2(x+3) & \cdots ㉢ \\ \dfrac{x}{2}+1\ge \dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{6} & \cdots ㉣ \end{cases}$

| 길잡이 | 연립일차부등식은 각각의 일차부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타내고 공통부분을 찾아 부등호를 사용하여 나타낸다.

| 풀 이 |

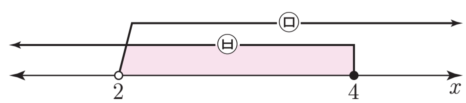
(1) 부등식 ㉠을 풀면

$$6-3x<x-2 \quad \Rightarrow \quad x>2 \qquad \cdots ㉤$$

이고 부등식 ㉡을 풀면

$$x-1\le -x+7 \quad \Rightarrow \quad x\le 4 \qquad \cdots ㉥$$

이다. ㉤, ㉥을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 구하는 해는 $2<x\le 4$이다.



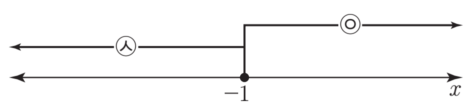
(2) 부등식 ㉢을 풀면

$$x-3\le -2x-6 \quad \Rightarrow \quad x\le -1 \qquad \cdots ㉦$$

이고 부등식 ㉣을 풀면

$$\frac{x}{2}+1\ge \frac{2}{3}+\frac{x}{6} \quad \Rightarrow \quad x\ge -1 \qquad \cdots ㉧$$

이다. ㉦, ㉧을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 구하는 해는 $x=-1$이다.



| 정답 | (1) $2<x\le 4$ (2) $x=-1$

• 연립일차부등식의 풀이(p.283)
• 연립부등식의 해(p.282)
• 부등식의 기본 성질(p.280)

돌다리 두드리기

다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2(x-4)\le x-3 \\ 6+2x\ge x+5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x\le x+2 \\ x-3>2\left(\dfrac{x}{4}-1\right) \end{cases}$

돌다리 두드리기

|답| (1) $-1\le x\le 5$ (2) 해는 없다.

(1) 각 부등식을 풀면 $x\le 5$, $x\ge -1$이므로 연립부등식의 해는 $-1\le x\le 5$ 이다.
(2) 각 부등식을 풀면 $x\le 2$, $x>2$이므로 연립부등식의 해는 없다.

개념 그대로

유제 02-1

다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} < -x-2 \\ \dfrac{x-1}{2} > \dfrac{x+3}{4} - \dfrac{3}{2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 0.2x+0.5 < 0.5x-0.7 \\ 0.6x-0.4 \geq 0.2(x+2) \end{cases}$

(1) 주어진 연립부등식을 $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} < -x-2 & \cdots ㉠ \\ \dfrac{x-1}{2} > \dfrac{x+3}{4} - \dfrac{3}{2} & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

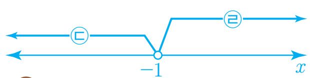
부등식 ㉠의 양변에 3을 곱하여 부등식을 풀면

$x-2 < -3x-6 \quad \Rightarrow \quad x < -1 \qquad \cdots ㉢$

이고 부등식 ㉡의 양변에 4를 곱하여 부등식을 풀면

$2(x-1) > x+3-6 \quad \Rightarrow \quad x > -1 \qquad \cdots ㉣$

이다. ㉢, ㉣ 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 구하는 해는 없다.



(2) 주어진 연립부등식을 $\begin{cases} 0.2x+0.5 < 0.5x-0.7 & \cdots ㉤ \\ 0.6x-0.4 \geq 0.2(x+2) & \cdots ㉥ \end{cases}$ 이라 하자.

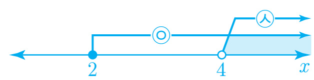
부등식 ㉤의 양변에 10을 곱하여 부등식을 풀면

$2x+5 < 5x-7 \quad \Rightarrow \quad x > 4 \qquad \cdots ㉦$

이고 부등식 ㉥의 양변에 10를 곱하여 부등식을 풀면

$6x-4 \geq 2x+4 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2 \qquad \cdots ㉧$

이다. ㉦, ㉧ 을 수직선 위에 나타내면 그림과 같으므로 구하는 해는 $x > 4$이다.



답 (1) 해는 없다. (2) $x > 4$

개념 그대로

유제 02-2

연립부등식 $\begin{cases} 5x-1 > 8(x-2) \\ 2(x-1) \leq 4x+3 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

주어진 연립부등식을 $\begin{cases} 5x-1 > 8(x-2) & \cdots ㉠ \\ 2(x-1) \leq 4x+3 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

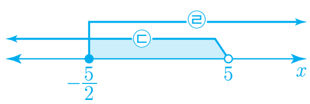
부등식 ㉠을 풀면

$5x-1 > 8(x-2) \quad \Rightarrow \quad x < 5 \qquad \cdots ㉢$

이고 부등식 ㉡을 풀면

$2(x-1) \leq 4x+3 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\dfrac{5}{2} \qquad \cdots ㉣$

이다. ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 구하는 해는 $-\dfrac{5}{2} \leq x < 5$ 이다. 따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$이고 그 개수는 7이다.



답 7

개념 그대로

유제 02-3

부등식 $9x-5 < 7(x-1) < 8(x-1)+4$를 푸시오.

주어진 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} 9x-5 < 7(x-1) & \cdots ㉠ \\ 7(x-1) < 8(x-1)+4 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

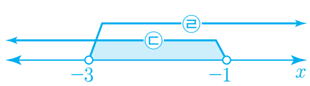
부등식 ㉠을 풀면

$9x-5 < 7(x-1) \quad \Rightarrow \quad x < -1 \qquad \cdots ㉢$

이고 부등식 ㉡을 풀면

$7(x-1) < 8(x-1)+4 \quad \Rightarrow \quad x > -3 \qquad \cdots ㉣$

이다. ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 구하는 해는 $-3 < x < -1$ 이다.



답 $-3 < x < -1$

해가 주어진 연립부등식

예제 03 x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x+8\le 2x+a \\ 3x-4\le x+2b \end{cases}$ 의 해가 $5\le x\le 7$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

| 길잡이 | 연립부등식을 풀어 해를 구한 다음 주어진 해와 비교한다.

| 풀 이 |

1단계 부등식의 성질을 이용하여 각각의 부등식의 해를 구한다.

주어진 연립부등식에서 각각의 일차부등식의 해를 구하면

$$x+8\le 2x+a \quad \Rightarrow \quad -x\le a-8$$
$$3x-4\le x+2b \quad \Rightarrow \quad 2x\le 2b+4$$

이다. 이때 부등식의 성질을 이용하면 각각의 부등식은

$$x\ge 8-a,\quad x\le b+2$$

와 같이 정리할 수 있다.

2단계 1단계에서 얻은 부등식의 해와 주어진 연립부등식의 해를 비교하여 상수의 값을 구한다.

문제에서 주어진 연립부등식의 해가 $5\le x\le 7$이므로

$$8-a=5,\quad b+2=7$$

이다. 따라서 $a=3$, $b=5$이다.

| 정답 | $a=3$, $b=5$

1 • 연립일차부등식의 풀이(p.283)
• 부등식의 기본 성질(p.280)

2 • 연립부등식의 해(p.282)

돌다리 두드리기

연립부등식 $\begin{cases} 3x-a<11 \\ x-b<2(x-4) \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<4$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $a=1$, $b=10$

각각의 부등식의 해를 구하면 $x<\frac{a+11}{3}$, $x>-b+8$이고 주어진 해가 $-2<x<4$이므로 $\frac{a+11}{3}=4$, $-b+8=-2$ 이다. 따라서 $a=1$, $b=10$이다.

정답 및 풀이 p.545

개념 그대로

유제 03-1

x에 대한 부등식 $4x+a<x+5<3x+b$의 해가 $-1<x<4$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

주어진 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} 4x+a<x+5 \\ x+5<3x+b \end{cases}$ 와 같고 각각의 부등식의 해를 구하면

$$4x+a<x+5 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{5-a}{3}$$

이고

$$x+5<3x+b \quad \Rightarrow \quad x>\frac{5-b}{2}$$

이다. 주어진 연립부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$$\frac{5-b}{2}=-1, \quad \frac{5-a}{3}=4$$

이다. 따라서 $a=-7$, $b=7$이다.

답 $a=-7$, $b=7$

개념 그대로

유제 03-2

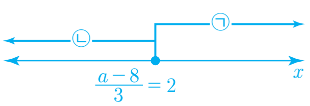
x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x+8\geq -2x+a \\ 4(x+3)\geq 5x+10 \end{cases}$ 의 해가 $x=k$뿐일 때, $a+k$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

주어진 연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 구하면

$$x+8\geq -2x+a \quad \Rightarrow \quad x\geq \frac{a-8}{3} \qquad \cdots ㉠$$

$$4(x+3)\geq 5x+10 \quad \Rightarrow \quad x\leq 2 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 주어진 연립부등식의 해가 $x=k$가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $k=2$이고 $\frac{a-8}{3}=2$에서 $a=14$이다. 따라서 구하는 값은 $a+k=16$이다.

답 16

개념 그대로

유제 03-3

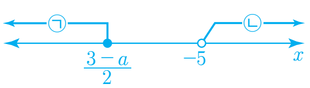
x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} 3x+3\geq 5x+a \\ 2x+6>x+1 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

주어진 연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 구하면

$$3x+3\geq 5x+a \quad \Rightarrow \quad x\leq \frac{3-a}{2} \qquad \cdots ㉠$$

$$2x+6>x+1 \quad \Rightarrow \quad x>-5 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 구하는 a의 범위는 $\frac{3-a}{2}\leq -5$에서 $a\geq 13$이다.



답 $a\geq 13$

예제 04

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-2|<3x+6$　　(2) $|2x+4|+2x<8$

길잡이 절댓값을 포함한 부등식은 절댓값 안의 식이 0이 되는 값을 찾고 이 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 부등식을 푼다. 하지만

$$|x|<a,\quad |x|>a,\quad a<|x|<b\qquad (0<a<b)$$

와 같은 꼴은 다음과 같이 x의 값의 범위를 나누지 않고도 풀 수 있다.

- $|x|<a$**이면** $-a<x<a$**이다.**
- $|x|>a$**이면** $x<-a$ **또는** $x>a$**이다.**
- $a<|x|<b$**이면** $-b<x<-a$ **또는** $a<x<b$**이다.**

풀 이

(1) 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 2이다.

(i) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로 주어진 부등식은

$$|x-2|=-x+2<3x+6 \quad\Rightarrow\quad x>-1$$

이다. 따라서 $x<2$와 $x>-1$의 공통범위는 $-1<x<2$이다.

(ii) $x\geq 2$일 때, $x-2\geq 0$이므로 주어진 부등식은

$$|x-2|=x-2<3x+6 \quad\Rightarrow\quad x>-4$$

이다. 따라서 $x\geq 2$와 $x>-4$의 공통범위는 $x\geq 2$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립부등식의 해는 $x>-1$이다.

[다른 풀이]

주어진 부등식은 $-(3x+6)<x-2<3x+6$이고, 이 연립부등식을 풀면 $x>-1$이다.

(2) 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 -2이다.

(i) $x<-2$일 때, $2x+4<0$이므로 주어진 부등식은

$$|2x+4|+2x=-2x-4+2x<8 \quad\Rightarrow\quad -4<8$$

이므로 $x<-2$의 범위에서 부등식이 항상 성립한다.

(ii) $x\geq -2$일 때, $2x+4\geq 0$이므로 주어진 부등식은

$$|2x+4|+2x=2x+4+2x<8 \quad\Rightarrow\quad x<1$$

이다. 따라서 $x\geq -2$와 $x<1$의 공통범위는 $-2\leq x<1$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립부등식의 해는 $x<1$이다.

[다른 풀이]

주어진 부등식은 $-(8-2x)<2x+4<8-2x$이고, 이 연립부등식을 풀면 $x<1$이다.

정답 (1) $x>-1$　(2) $x<1$

- 절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 풀이(p.284)
- 부등식의 기본 성질(p.280)
- 절댓값과 부호(p.155)

돌다리 두드리기

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-5|<-2x+7$　　(2) $|3x+3|<6-3x$

돌다리 두드리기

답 (1) $x<2$　(2) $x<\frac{1}{2}$

(1) 연립부등식 $-(-2x+7)<x-5<-2x+7$을 풀면 $x<2$, $x<4$이므로 $x<2$이다.

(2) 연립부등식 $-(6-3x)<3x+3<6-3x$를 풀면 $-6<3$, $x<\frac{1}{2}$이므로 $x<\frac{1}{2}$이다.

정답 및 풀이 p.545

개념 그대로

유제 04-1

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|3x-2|<x+3$　　(2) $|6-x|+x\geq 2(x-2)$

(1) 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $\frac{2}{3}$이다.

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $3x-2<0$에서 주어진 부등식은

$$|3x-2|=-3x+2<x+3 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{1}{4}$$

이므로 $x<\frac{2}{3}$와 $x>-\frac{1}{4}$의 공통범위는 $-\frac{1}{4}<x<\frac{2}{3}$이다.

(ii) $x\geq\frac{2}{3}$일 때, $3x-2\geq 0$에서 주어진 부등식은

$$|3x-2|=3x-2<x+3 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{5}{2}$$

이므로 $x\geq\frac{2}{3}$와 $x<\frac{5}{2}$의 공통범위는 $\frac{2}{3}\leq x<\frac{5}{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{2}$이다.

(2) 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 6이다.

(i) $x\leq 6$일 때, $6-x\geq 0$이므로 주어진 부등식은

$$|6-x|+x=6-x+x\geq 2(x-2) \quad \Rightarrow \quad x\leq 5$$

이다. 따라서 $x\leq 6$과 $x\leq 5$의 공통범위는 $x\leq 5$이다.

(ii) $x>6$일 때, $6-x<0$이므로 주어진 부등식은

$$|6-x|+x=x-6+x\geq 2(x-2) \quad \Rightarrow \quad -6\geq -4$$

이므로 해가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x\leq 5$이다.

답 (1) $-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{2}$　(2) $x\leq 5$

개념 그대로

유제 04-2

x에 대한 부등식 $|x-a|\leq 4$의 해가 $-1\leq x\leq b$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

주어진 부등식 $|x-a|\leq 4$에서

$$-4\leq x-a\leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4+a\leq x\leq 4+a$$

이다. 이때 연립부등식의 해가 $-1\leq x\leq b$이므로

$$-4+a=-1, \quad 4+a=b$$

이고 이 두 방정식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=7$이다.

답 $a=3$, $b=7$

개념 더하기

유제 04-3

+ 연립일차부등식의 풀이(p.283)

부등식 $3\leq|4x-5|<9$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $\frac{5}{4}$이다.

(i) $x<\frac{5}{4}$일 때, $4x-5<0$에서 주어진 부등식은

$$3\leq|4x-5|=-4x+5<9 \quad \Rightarrow \quad -1<x\leq\frac{1}{2}$$

이다. 따라서 $x<\frac{5}{4}$와 $-1<x\leq\frac{1}{2}$의 공통범위는 $-1<x\leq\frac{1}{2}$이다.

(ii) $x\geq\frac{5}{4}$일 때, $4x-5\geq 0$에서 주어진 부등식은

$$3\leq|4x-5|=4x-5<9 \quad \Rightarrow \quad 2\leq x<\frac{7}{2}$$

이다. 따라서 $x\geq\frac{5}{4}$와 $2\leq x<\frac{7}{2}$의 공통범위는 $2\leq x<\frac{7}{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 부등식의 해는 $-1<x\leq\frac{1}{2}$ 또는 $2\leq x<\frac{7}{2}$이다. 이 범위에서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 2, 3이므로 개수는 3이다.

답 3

절댓값 기호를 2개 이상 포함한 부등식

예제 05 부등식 $|x|+|x+4|<6$을 푸시오.

길잡이 부등식의 절댓값 기호가 여러 개 있는 경우, 각각의 절댓값 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누고, 각각의 범위에서 절댓값 기호를 없애고 부등식을 푼다.

풀이

1단계 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 x의 값을 경계로 범위를 나눈다.

절댓값 기호 안의 식 x, $x+4$의 값이 0이 되는 x의 값은 각각 0, -4이므로

$$x<-4, \quad -4\le x<0, \quad x\ge 0$$

과 같이 세 범위로 나눌 수 있다.

2단계 1단계에서 얻은 각 범위에서 부등식의 해를 구한다.

(i) $x<-4$일 때, $x+4<0$, $x<0$이므로 주어진 부등식은

$$|x|+|x+4|=-x-(x+4)=-2x-4<6 \quad \Rightarrow \quad x>-5$$

이다. 따라서 $x<-4$와 $x>-5$의 공통범위는 $-5<x<-4$이다.

(ii) $-4\le x<0$일 때, $x+4\ge 0$, $x<0$이므로 주어진 부등식은

$$|x|+|x+4|=-x+(x+4)=4<6$$

이다. 따라서 $-4\le x<0$의 범위에서 부등식이 항상 성립한다.

(iii) $x\ge 0$일 때, $x+4>0$, $x\ge 0$이므로 주어진 부등식은

$$|x|+|x+4|=2x+4<6 \quad \Rightarrow \quad x<1$$

이다. 따라서 $x\ge 0$과 $x<1$의 공통범위는 $0\le x<1$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-5<x<1$이다.

정답 $-5<x<1$

1 • 절댓값과 부호(p.155)

2 • 절댓값 기호를 2개 이상 포함한 부등식의 풀이(p.285)
• 부등식의 기본 성질(p.280)

돌다리 두드리기

부등식 $|x|+|x-3|>5$를 푸시오.

(i) $x<0$일 때, 주어진 부등식은 $-2x+3>5 \Rightarrow x<-1$ 이다. 따라서 부등식의 해는 공통범위인 $x<-1$이다.
(ii) $0\le x<3$일 때, 주어진 부등식은 $x-x+3=3>5$ 이고 해가 없다.
(iii) $x\ge 3$일 때, 주어진 부등식은 $2x-3>5 \Rightarrow x>4$ 이다. 따라서 부등식의 해는 공통범위인 $x>4$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x<-1$ 또는 $x>4$이다.

돌다리 두드리기

|답| $x<-1$ 또는 $x>4$

개념 그대로

유제 05-1

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|2x+3|-|x-1|>4$　　(2) $3|x+2|+|x-2|\leq 6$

(1) 절댓값 기호 안의 식 $2x+3$, $x-1$의 값이 0이 되는 x의 값은 각각 $-\frac{3}{2}$, 1이므로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$x<-\frac{3}{2},\quad -\frac{3}{2}\leq x<1,\quad x\geq 1$$

(i) $x<-\frac{3}{2}$일 때, $2x+3<0$, $x-1<0$이므로 주어진 부등식은
$-(2x+3)+(x-1)>4 \Rightarrow x<-8$이다. 공통범위는 $x<-8$

(ii) $-\frac{3}{2}\leq x<1$일 때, $2x+3\geq 0$, $x-1<0$이므로 주어진 부등식은
$(2x+3)+(x-1)>4 \Rightarrow x>\frac{2}{3}$이다. 따라서 공통범위는 $\frac{2}{3}<x<1$

(iii) $x\geq 1$일 때, $2x+3>0$, $x-1\geq 0$이므로 주어진 부등식은
$(2x+3)-(x-1)>4 \Rightarrow x>0$이다. 따라서 공통범위는 $x\geq 1$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x<-8$ 또는 $\frac{2}{3}>x$이다.

(2) 절댓값 기호 안의 식 $x+2$, $x-2$의 값이 0이 되는 x의 값은 각각 -2, 2이므로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$x<-2,\quad -2\leq x<2,\quad x\geq 2$$

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-2<0$이므로 주어진 부등식은
$-3(x+2)-(x-2)\leq 6 \Rightarrow x\geq -\frac{5}{2}$이므로 공통범위는 $-\frac{5}{2}\leq x<-2$

(ii) $-2\leq x<2$일 때, $x+2\geq 0$, $x-2<0$이므로 주어진 부등식은
$3(x+2)-(x-2)\leq 6 \Rightarrow x\leq -1$이다. 따라서 공통범위는
$-2\leq x\leq -1$

(iii) $x\geq 2$일 때, $x+2>0$, $x-2\geq 0$이므로 주어진 부등식은
$3(x+2)+(x-2)\leq 6 \Rightarrow x\leq \frac{1}{2}$이다. 따라서 공통범위가 없으므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{5}{2}\leq x\leq -1$이다.

답 (1) $x<-8$ 또는 $\frac{2}{3}<x$　(2) $-\frac{5}{2}\leq x\leq -1$

개념 그대로

유제 05-2

부등식 $2|x+3|<|x-3|$의 해가 $a<x<b$일 때, ab의 값을 구하시오.

절댓값 기호 안의 식 $x+3$, $x-3$의 값이 0이 되는 x의 값은 각각 -3, 3이므로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$x<-3,\quad -3\leq x<3,\quad x\geq 3$$

(i) $x<-3$일 때, $x+3<0$, $x-3<0$이므로 주어진 부등식은

$$2|x+3|<|x-3| \quad\Rightarrow\quad -2(x+3)<-(x-3)$$

에서 $x>-9$이다. 따라서 공통범위는 $-9<x<-3$

(ii) $-3\leq x<3$일 때, $x+3\geq 0$, $x-3<0$이므로 주어진 부등식은

$$2|x+3|<|x-3| \quad\Rightarrow\quad 2(x+3)<-(x-3)$$

에서 $x<-1$이다. 따라서 공통범위는 $-3\leq x<-1$

(iii) $x\geq 3$일 때, $x+3>0$, $x-3\geq 0$이므로 주어진 부등식은

$$2|x+3|<|x-3| \quad\Rightarrow\quad 2(x+3)<(x-3)$$

에서 $x<-9$이다. 따라서 공통범위가 없으므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-9<x<-1$이므로 $a=-9$, $b=-1$이고 구하는 값은 $ab=9$이다.

답 9

개념 그대로

유제 05-3

부등식 $3|x+1|-2|x-1|\leq 8$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

절댓값 기호 안의 식 $x+1$, $x-1$의 값이 0이 되는 x의 값은 각각 -1, 1이므로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$x<-1,\quad -1\leq x<1,\quad x\geq 1$$

(i) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-1<0$이므로 주어진 부등식은
$-3(x+1)+2(x-1)\leq 8 \Rightarrow x\geq -13$이다. 따라서 공통범위는
$-13\leq x<-1$

(ii) $-1\leq x<1$일 때, $x+1\geq 0$, $x-1<0$이므로 주어진 부등식은
$3(x+1)+2(x-1)\leq 8 \Rightarrow x\leq \frac{7}{5}$이다. 따라서 공통범위는
$-1\leq x<1$

(iii) $x\geq 1$일 때, $x+1\geq 0$, $x-1\geq 0$이므로 주어진 부등식은
$3(x+1)-2(x-1)\leq 8 \Rightarrow x\leq 3$이다. 따라서 공통범위는 $1\leq x\leq 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-13\leq x\leq 3$이다. 따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 17이다.

답 17

09-2 이차부등식

이차부등식과 이차함수의 관계

이차부등식은 x^2의 계수가 0이 아님을 가정한다.

부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때,

$$ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c\geq 0,\quad ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c\leq 0$$

과 같이 좌변을 x에 대한 이차식으로 나타낼 수 있는 부등식을 x에 대한 이차부등식이라 한다. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축 $(y=0)$의 교점의 x좌표와 같다. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀어보자.

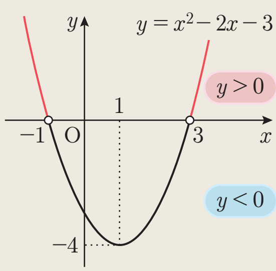


그림 9.1. 이차부등식과 이차함수의 관계

이차부등식 $x^2-2x-3>0$의 해는 이차함수 $y=x^2-2x-3$에서 $y>0$을 만족시키는 x의 값의 범위, 즉 그림에서 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다. 따라서 이차부등식 $x^2-2x-3>0$의 해는 $x<-1$ 또는 $x>3$이다.

이차부등식 $x^2-2x-3<0$의 해는 이차함수 $y=x^2-2x-3$에서 $y<0$을 만족시키는 x의 값의 범위, 즉 그림에서 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다. 따라서 이차부등식 $x^2-2x-3<0$의 해는 $-1<x<3$이다.

일반적으로 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 $y>0$을 만족시키는 x의 값의 범위, 즉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.

또한 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 $y<0$을 만족시키는 x의 값의 범위, 즉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.

포인트 상 9.8

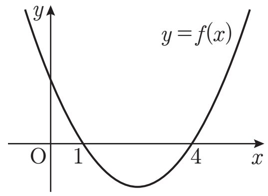
이차함수의 그래프와 이차부등식의 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에 대하여

- 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.
- 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.
- 등호가 포함된 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 포함한다.

보기 9.4 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 이차부등식의 해를 구하시오.

(1) $f(x)\geq 0$ (2) $f(x)<0$



이차부등식의 해

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 이차부등식의 해를 구할 수 있으므로 이차부등식의 풀이는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 다음의 세 가지로 나누어 생각할 수 있다. 여기서는 $a>0$인 경우만 생각하자.

$D>0$인 경우

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가지므로 이차함수

$$y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나고 이차부등식의 해는 다음과 같다.

- $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이다.
- $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$이다.
- $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다.
- $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$이다.

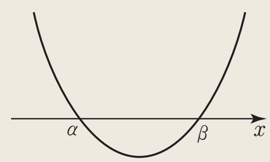


그림 9.2. 이차함수가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나는 경우

예 시 이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-5)^2-4\times 1\times 6=1>0$$

이므로 이차방정식 $x^2-5x+6=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.
이때, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$의 서로 다른 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로 이차함수 $y=x^2-5x+6$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점 $(2,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만난다. 즉

(1) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)>0$의 해는 $x<2$ 또는 $x>3$이다.
(2) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\geq 0$의 해는 $x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$이다.
(3) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)<0$의 해는 $2<x<3$이다.
(4) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\leq 0$의 해는 $2\leq x\leq 3$이다.

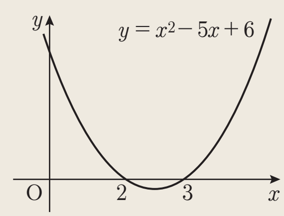


그림 9.3. 이차함수 $y=x^2-5x+6$의 그래프

보기 정답

9.4 (1) $x\leq 1$ 또는 $x\geq 4$
(2) $1<x<4$

$D=0$인 경우

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 중근 α를 가지므로 이차함수

$$y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$

의 그래프는 x축과 한 점 $(\alpha,\ 0)$에서 만나고 이차부등식의 해는 다음과 같다.

- $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x\neq\alpha$인 모든 실수이다.
- $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 모든 실수이다.
- $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.
- $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 $x=\alpha$이다.

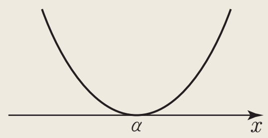


그림 9.4. 이차함수가 x축과 한 점에서 만나는 경우

예 시

이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-2)^2-4\times1\times1=0$$

이므로 이차방정식 $x^2-2x+1=0$은 중근을 가진다. 이때, $x^2-2x+1=(x-1)^2$의 완전제곱으로 인수분해되므로 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프는 x축과 한 점 $(1,\ 0)$에서 만난다. 즉

(1) $x^2-2x+1=(x-1)^2>0$의 해는 $x\neq1$인 모든 실수이다.
(2) $x^2-2x+1=(x-1)^2\geq0$의 해는 모든 실수이다.
(3) $x^2-2x+1=(x-1)^2<0$의 해는 없다.
(4) $x^2-2x+1=(x-1)^2\leq0$의 해는 $x=1$이다.

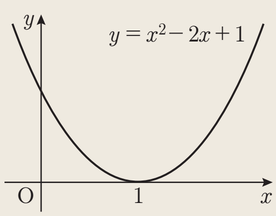


그림 9.5. 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프

$D<0$인 경우

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 허근을 가지므로 이차함수

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

의 그래프는 x축과 만나지 않고 이차부등식의 해는 다음과 같다.

- $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수이다.
- $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 모든 실수이다.
- $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.
- $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 없다.

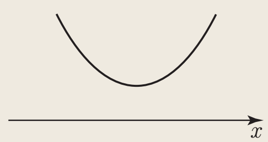


그림 9.6. 이차함수가 x축과 만나지 않는 경우

예 시

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-4)^2-4\times1\times5=-4<0$$

이므로 이차방정식 $x^2-4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다. 이때, 실수 x에 대하여 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$의 값은 항상 양수이므로 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 즉

(1) $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$의 해는 모든 실수이다.
(2) $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq0$의 해는 모든 실수이다.
(3) $x^2-4x+5=(x-2)^2+1<0$의 해는 없다.
(4) $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\leq0$의 해는 없다.

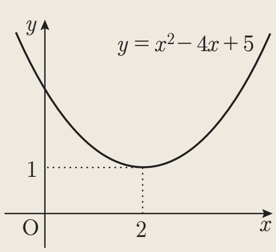
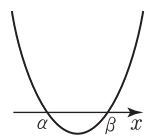
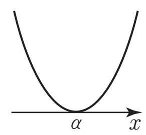
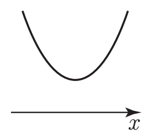


그림 9.7. 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프

포인트 이차부등식의 해

상 9.9

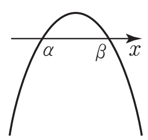
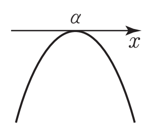
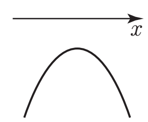
이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq 0$	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다	해가 없다
$ax^2+bx+c\leq 0$	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	해가 없다

보기 9.5 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-3x+2>0$ (2) $x^2+2x+1\leq 0$ (3) $x^2+x+1<0$

$a<0$인 경우에는 위로 볼록한 모양의 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있다.

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다	해가 없다
$ax^2+bx+c\geq 0$	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	해가 없다
$ax^2+bx+c<0$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\leq 0$	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수

또는 이차부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수를 양수로 만든 뒤 이차부등식을 풀 수도 있다. 이때 부등호의 방향을 바꾸는 것을 잊어서는 안된다.

보기 9.6 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $-x^2-x+6>0$ (2) $-x^2+4x-4\leq 0$ (3) $-x^2-4x-5\geq 0$

보기 정답

9.5 (1) $x<1$ 또는 $x>2$
(2) $x=-1$ (3) 해가 없다.

9.6 (1) $-3<x<2$
(2) 모든 실수 (3) 해가 없다.

해가 모든 실수인 이차부등식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때, 이차부등식

$$ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c\geq 0,\quad ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c\leq 0$$

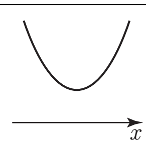
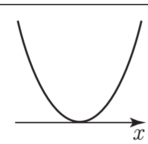
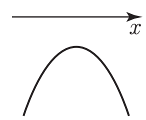
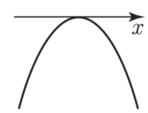
의 해가 모든 실수인 조건을 알아보자.

- **$ax^2+bx+c>0$의 해가 모든 실수** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 항상 x축의 위쪽에 있어야 한다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않아야 하므로 $a>0,\ D<0$이다.
- **$ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 모든 실수** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 항상 x축의 위쪽에 있거나 x축에 접해야 한다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않거나 접해야 하므로 $a>0,\ D\leq 0$이다.
- **$ax^2+bx+c<0$의 해가 모든 실수** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 항상 x축의 아래쪽에 있어야 한다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하고, x축과 만나지 않아야 하므로 $a<0,\ D<0$이다.
- **$ax^2+bx+c\leq 0$의 해가 모든 실수** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 항상 x축의 아래쪽에 있거나 x축에 접해야 한다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하고, x축과 만나지 않거나 접해야 하므로 $a<0,\ D\leq 0$이다.

포인트 상 9.10

이차부등식이 항상 성립할 조건

다음 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은 다음과 같다.
(단, D는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식이다.)

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
			
$a>0,\ D<0$	$a>0,\ D\leq 0$	$a<0,\ D<0$	$a<0,\ D\leq 0$

예시

이차부등식 $x^2-3x+m\geq 0$이 x의 값에 상관없이 성립하기 위해서는 이차방정식 $x^2-3x+m=0$의 판별식 D에 대하여

$$D=3^2-4m=9-4m\leq 0$$

이어야 한다. 따라서 $m\geq \frac{9}{4}$이다.

보기 9.7 다음 이차부등식이 x의 값에 상관없이 성립하도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) $x^2+2x+k>0$ (2) $-x^2-kx-4\leq 0$

보기 정답

9.7 (1) $k>1$ (2) $-4\leq k\leq 4$

해가 주어진 이차부등식

두 수를 근으로 하는 이차방정식(p.171)을 구하는 것과 마찬가지로 이차부등식의 해가 주어지면 이차부등식을 구할 수 있다. 이는 이차부등식의 해를 구하는 과정을 역으로 생각한 것과 같다.

해가 $1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-1)(x-2)<0 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x+2<0 \qquad \cdots (9.2.1)$$

이다. 또한 해는 $1<x<2$로 동일하지만 x^2의 계수가 -2인 이차부등식은 (9.2.1)의 부등식의 양변에 -2를 곱하면 된다. 즉,

$$-2(x-1)(x-2)>0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2+6x-4>0$$

이다. 이를 일반화하면 다음과 같다.

포인트 상 9.11 **해가 주어진 이차부등식**

두 실수 α, β $(\alpha<\beta)$에 대하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 다음과 같다.

- 해가 $\alpha<x<\beta$이면 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$이다.
- 해가 $\alpha\le x\le\beta$이면 $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$이다.
- 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이면 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$이다.
- 해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$이면 $(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$이다.
- 해가 $x=\alpha$이면 $(x-\alpha)^2\le 0$이다.
- 해가 $x\ne\alpha$인 모든 실수이면 $(x-\alpha)^2>0$이다.

x^2의 계수가 a인 이차부등식은 위 부등식의 양변에 각각 a를 곱하여 구한다. 이때 $a<0$이면 부등호의 방향이 바뀜에 주의해야 한다.

예 시

(1) 해가 $x<-1$ 또는 $x>2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-2)>0 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-2>0$$

(2) 해가 $x\ne 2$인 모든 실수이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)^2>0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+4>0$$

(3) 해가 $x\ne 2$인 모든 실수이고 x^2의 계수가 -2인 이차부등식은 (2)에서 구한 부등식의 양변에 -2를 곱하면 된다.

$$-2(x-2)^2<0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2+8x-8<0$$

보기 9.8 다음 범위의 해를 가지고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 구하시오.

(1) $-1<x<3$ (2) $x\le -2$ 또는 $x\ge 3$

(3) $x=2$ (4) $x\ne 1$인 모든 실수

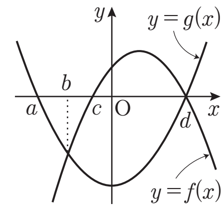
보기 정답

9.8 (1) $x^2-2x-3<0$
(2) $x^2-x-6\ge 0$
(3) $x^2-4x+4\le 0$
(4) $x^2-2x+1>0$

이차함수의 그래프와 이차부등식

예제 06

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)>0$ (2) $g(x)\le 0$

(3) $f(x)\le g(x)$ (4) $f(x)g(x)<0$

| 길잡이 | 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에 대하여 다음 성질을 이용한다.

- 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.
- 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.
- 등호가 포함된 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 포함한다.

| 풀 이 |

- 이차함수의 그래프와 이차부등식의 관계(p.296)
- 부등식의 기본 성질(p.280)

(1) 부등식 $f(x)>0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $c<x<d$이다.

(2) 부등식 $g(x)\le 0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $a\le x\le d$이다.

(3) 부등식 $f(x)\le g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 그 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 $x\le b$ 또는 $x\ge d$이다.

(4) 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해는 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족하는 x의 값의 범위이다.

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$인 경우

$$f(x)>0 \Rightarrow c<x<d, \qquad g(x)<0 \Rightarrow a<x<d$$

이므로 공통부분은 $c<x<d$이다.

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$인 경우

$$f(x)<0 \Rightarrow x<c \text{ 또는 } x>d, \qquad g(x)>0 \Rightarrow x<a \text{ 또는 } x>d$$

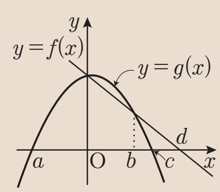
이므로 공통부분은 $x<a$ 또는 $x>d$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x<a$ 또는 $c<x<d$ 또는 $x>d$이다.

| 정답 | (1) $c<x<d$ (2) $a\le x\le d$ (3) $x\le b$ 또는 $x\ge d$
(4) $x<a$ 또는 $c<x<d$ 또는 $x>d$

돌다리 두드리기

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)\le 0$ (2) $g(x)>0$

(3) $f(x)>g(x)$ (4) $f(x)g(x)>0$

돌다리 두드리기

| 답 | (1) $x\ge d$ (2) $a<x<c$
(3) $x<0$ 또는 $x>b$
(4) $a<x<c$ 또는 $x>d$

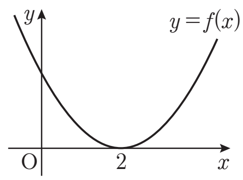
(1) $x\ge d$
(2) $a<x<c$
(3) $x<0$ 또는 $x>b$
(4) $f(x)>0$, $g(x)>0$인 경우 $a<x<c$
$f(x)<0$, $g(x)<0$인 경우 $x>d$
따라서 해는 $a<x<c$ 또는 $x>d$

정답 및 풀이 p.547

개념 그대로

유제 06-1

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하시오.



(1) $f(x)>0$　　(2) $f(x)\geq 0$

(3) $f(x)<0$　　(4) $f(x)\leq 0$

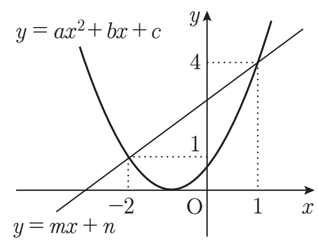
(1) 부등식 $f(x)>0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x\neq 2$인 모든 실수이다.
(2) 부등식 $f(x)\geq 0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 모든 실수이다.
(3) 부등식 $f(x)<0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 해는 없다.
(4) 부등식 $f(x)\leq 0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x=2$이다.

답 (1) $x\neq 2$인 모든 실수　(2) 모든 실수
(3) 해는 없다.　(4) $x=2$

개념 그대로

유제 06-2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 일차함수 $y=mx+n$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $ax^2+bx+c<mx+n$의 해를 구하시오.
(단, a, b, c, m, n은 상수이다.)



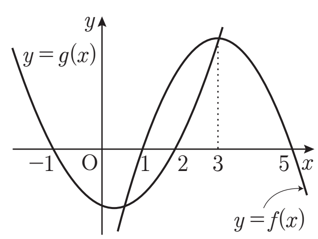
구하는 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 일차함수 $y=mx+n$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-2<x<1$이다.

답 $-2<x<1$

개념 그대로

유제 06-3

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.



부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족하는 x의 값의 범위이다.

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$인 경우

$f(x)>0 \Rightarrow 1<x<5$　　$g(x)>0 \Rightarrow x<-1$ 또는 $x>2$

이므로 공통범위는 $2<x<5$이다. 따라서 조건을 만족시키는 정수는 $x=3$, 4이다.

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$인 경우

$f(x)<0 \Rightarrow x<1$ 또는 $x>5$　　$g(x)<0 \Rightarrow -1<x<2$

이므로 공통범위는 $-1<x<1$이다. 따라서 조건을 만족시키는 정수는 $x=0$이다.

(i), (ii)에 의하여 부등식을 만족시키는 정수 x는 $x=0$, 3, 4이고 그 개수는 3이다.

답 3

예제 07

다음 부등식을 푸시오.

(1) $3x^2-8x+4\geq 0$ (2) $x^2-3x+2<x-1$

(3) $x^2+2<2\sqrt{2}x$ (4) $2x^2+4x+3>0$

- 이차부등식의 해(p.299)
- 이차함수의 그래프와 이차부등식의 관계(p.296)
- 부등식의 기본 성질(p.280)

길잡이 이차부등식은 이차함수의 그래프를 이용하여 푼다.

풀 이

(1) $3x^2-8x+4\geq 0$에서 좌변을 인수분해하면

$$3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)\geq 0$$

이므로 주어진 부등식의 해는 $x\leq \frac{2}{3}$ 또는 $x\geq 2$이다.

(2) $x^2-3x+2<x-1$을 정리하면

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)<0$$

이므로 주어진 부등식의 해는 $1<x<3$이다.

(3) $x^2+2<2\sqrt{2}x$를 정리하여 좌변을 완전제곱식으로 만들면

$$x^2-2\sqrt{2}x+2=(x-\sqrt{2})^2<0$$

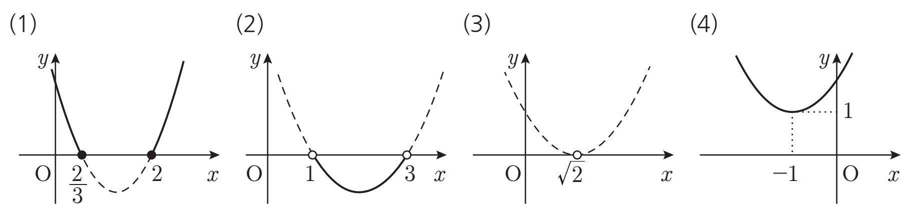
이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

(4) $2x^2+4x+3>0$을 정리하면

$$2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1>0$$

이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

정답 (1) $x\leq \frac{2}{3}$ 또는 $x\geq 2$ (2) $1<x<3$ (3) 해는 없다. (4) 모든 실수



돌다리 두드리기

다음 부등식을 푸시오.

(1) $4x^2+3x-1\leq 0$ (2) $x^2+10<5x$ (3) $-9x(x+1)-3x\geq 4$

돌다리 두드리기

답 (1) $-1\leq x\leq \frac{1}{4}$ (2) 해는 없다.

(3) $x=-\frac{2}{3}$

(1) $(4x-1)(x+1)\leq 0$이므로 해는 $-1\leq x\leq \frac{1}{4}$

(2) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}<0$이므로 해는 없다.

(3) $(3x+2)^2\leq 0$이므로 해는 $x=-\frac{2}{3}$

개념 그대로

유제 07-1

다음 부등식을 푸시오.

(1) $x^2+2x-3>0$ (2) $4(x^2+x+1)>3$ (3) $x^2-2x+3\geq 2(x-1)$

(1) 좌변을 인수분해하면

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)>0$$

이므로 주어진 부등식의 해는 $x<-3$ 또는 $x>1$이다.

(2) $4(x^2+x+1)>3$을 정리하면

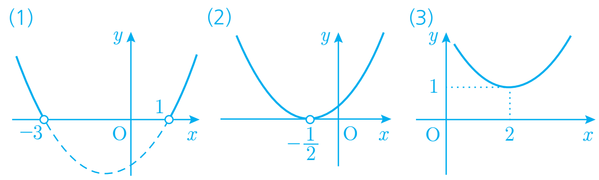
$$4x^2+4x+1=(2x+1)^2>0$$

이므로 주어진 부등식의 해는 $x\neq -\frac{1}{2}$인 모든 실수이다.

(3) 양변에 -1을 곱하여 정리하면

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 0$$

이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.



답 (1) $x<-3$ 또는 $x>1$

(2) $x\neq-\frac{1}{2}$인 모든 실수

(3) 모든 실수

개념 그대로

유제 07-2

$f(x)=x+3$일 때, 부등식 $3xf(x)\leq f(x)$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

$f(x)=x+3$을 부등식에 대입하면 $3x(x+3)\leq x+3$이다. 이 부등식을 정리하면

$$3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)\leq 0$$

이므로 해는 $-3\leq x\leq\frac{1}{3}$이다. 따라서 부등식을 만족하는 정수 x는 $-3, -2, -1, 0$이고 그 개수는 4이다.

답 4

개념 더하기

유제 07-3

+ 절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 풀이(p.284)

부등식 $x^2-3|x|-4<0$의 해를 구하시오.

절댓값 안의 식의 값이 0되는 x의 값은 0이다.

(i) $x<0$일 때, 주어진 부등식을 정리하면

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)<0$$

이므로 $-4<x<1$이다. 따라서 부등식의 해는 $x<0$과 $-4<x<1$의 공통부분으로 $-4<x<0$이다.

(ii) $x\geq 0$일 때, 주어진 부등식을 정리하면

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)<0$$

이므로 $-1<x<4$이다. 따라서 부등식의 해는 $x\geq 0$과 $-1<x<4$의 공통부분으로 $0\leq x<4$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-4<x<4$이다.

[다른 풀이]

$x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식을 정리하면

$$|x|^2-3|x|-4=(|x|-4)(|x|+1)<0$$

에서 $|x|+1>0$이므로 양변을 $|x|+1$로 나누면

$$|x|-4<0 \quad\Rightarrow\quad -4<x<4$$

답 $-4<x<4$

이차부등식이 항상 성립할 조건

예제 08 부등식 $ax^2+2ax+3\geq 0$이 x의 값에 상관없이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

| 길잡이 | 문제의 조건에 맞는 이차부등식을 세워 이차방정식의 판별식을 이용한다. 특히, 이차항의 계수가 문자일 때에는 이차부등식이 아닌 부등식의 조건에서는 이차항의 계수가 0인 경우도 생각해야 한다.

| 풀 이 |

1단계 x^2의 계수가 0일 때, 부등식이 항상 성립하는지 확인한다.

$a=0$일 때,

$$0\cdot x^2+2\cdot 0\cdot x+3=3\geq 0$$

이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

2단계 x^2의 계수가 0이 아닐 때, 부등식이 항상 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

$a\neq 0$일 때, 주어진 부등식이 x의 값에 상관없이 성립하도록 하려면 이차함수의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$a>0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한 이차방정식 $ax^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)\leq 0$$

이므로

$$0\leq a\leq 3 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 따라서 ㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $0<a\leq 3$이다.

3단계 1단계와 2단계의 결과를 이용하여 a의 값의 범위를 구한다

따라서 구하는 a의 값의 범위는 $0\leq a\leq 3$이다.

| 정답 | $0\leq a\leq 3$

1 • 부등식의 기본 성질(p.280)

2 • 이차부등식이 항상 성립할 조건(p.300)
• 이차방정식의 판별식(p.166)

3 • 연립부등식의 해(p.282)

돌다리 두드리기

부등식 $ax^2-4ax-8<0$이 x의 값에 상관없이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

(i) $a=0$일 때, $-8<0$이므로 모든 실수 x에 대해 성립한다.

(ii) $a\neq 0$ 일 때, $a<0$, $\frac{D}{4}=4a^2+8a=4a(a+2)<0$이므로 $-2<a<0$ 이다.

(i), (ii)에 의해 a의 범위는 $-2<a\leq 0$

돌다리 두드리기

| 답 | $-2<a\leq 0$

정답 및 풀이 p.548

개념 그대로

유제 08-1

모든 실수 x에 대하여 $(a+1)x^2-2(a+1)x$의 값이 -3보다 크기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

x의 값에 상관없이 부등식 $(a+1)x^2-2(a+1)x+3>0$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 찾아야 한다.

(i) $a+1=0$ 즉, $a=-1$일 때,

$$0\cdot x^2-2\cdot 0\cdot x+3=3>0$$

이므로 x의 값에 상관없이 성립한다.

(ii) $a\neq -1$일 때, 주어진 부등식이 x의 값에 상관없이 성립하도록 하려면 이차함수의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$a+1>0 \quad \Rightarrow \quad a>-1 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한 이차방정식 $(a+1)x^2-2(a+1)x+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-3(a+1)=(a+1)(a-2)<0$$

이므로

$$-1<a<2 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡의 공통범위는 $-1<a<2$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는 $-1\leq a<2$이다.

답 $-1\leq a<2$

개념 그대로

유제 08-2

x에 대한 부등식 $(a-1)x^2+(a-1)x-3>0$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

부등식 $(a-1)x^2+(a-1)x-3>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(a-1)x^2+(a-1)x-3\leq 0 \qquad \cdots ㉠$$

이 성립해야 한다.

(i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때,

$$0\cdot x^2-0\cdot x-3=-3\leq 0$$

이므로 부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\neq 1$일 때, 부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차함수의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$$a-1<0 \quad \Rightarrow \quad a<1 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 또한 이차방정식 $(a-1)x^2+(a-1)x-3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(a-1)^2+12(a-1)=(a-1)(a+11)\leq 0$$

이므로

$$-11\leq a\leq 1 \qquad \cdots ㉢$$

이다. 따라서 ㉡, ㉢의 공통범위를 구하면 $-11\leq a<1$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는 $-11\leq a\leq 1$이다.

답 $-11\leq a\leq 1$

개념 더하기

유제 08-3

+ 이차함수의 그래프와 이차부등식의 관계(p.296)

이차함수 $y=x^2+4nx$의 그래프가 직선 $y=6x-4$보다 항상 위쪽에 있도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+4nx>6x-4$, 즉 $x^2+2(2n-3)x+4>0$이 성립해야한다. 따라서 이차방정식 $x^2+2(2n-3)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=(2n-3)^2-4<0$$

이 성립해야 한다. 부등식 $(2n-3)^2<4$을 풀면

$$-2<2n-3<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$$

이다. n은 자연수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$이다. 따라서 구하는 자연수 n의 개수는 2이다.

답 2

해가 주어진 이차부등식

예제 09 다음 물음에 답하시오.

(1) 이차부등식 $2x^2+ax+b>0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>4$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 이차부등식 $ax^2+bx+12>0$의 해가 $-3<x<2$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(3) 이차부등식 $4x^2+ax+b\le 0$의 해가 $x=1$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

길잡이 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 만든 후 이차항의 계수에 맞는 수를 곱하여 상수의 값을 구한다.

풀 이

(1) 해가 $x<-1$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-4)>0 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-4>0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 부등식 ㉠의 양변에 2를 곱한 $2x^2-6x-8>0$은 부등식 $2x^2+ax+b>0$과 같으므로 $a=-6$, $b=-8$이다.

(2) 해가 $-3<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+3)(x-2)<0 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-6<0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이때, 부등식 $ax^2+bx+12>0$과 부등식 ㉡의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$이다. 이때, 부등식 ㉡의 양변에 a를 곱한 $ax^2+ax-6a>0$은 부등식 $ax^2+bx+12>0$과 같으므로 $a=b$이고 $-6a=12$이다. 따라서 구하는 값은 $a=-2$, $b=-2$이다.

(3) 해가 $x=1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-1)^2\le 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+1\le 0 \qquad \cdots ㉢$$

이다. 부등식 ㉢의 양변에 4를 곱한 $4x^2-8x+4\le 0$은 부등식 $4x^2+ax+b\le 0$과 같으므로 $a=-8$, $b=4$이다.

정답 (1) $a=-6$, $b=-8$
(2) $a=-2$, $b=-2$
(3) $a=-8$, $b=4$

• 해가 주어진 이차부등식(p.301)
• 부등식의 기본 성질(p.280)

돌다리 두드리기

다음 물음에 답하시오.

(1) 이차부등식 $3x^2+ax+b<0$의 해가 $2<x<3$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 이차부등식 $ax^2+bx-8\ge 0$의 해가 $1\le x\le 2$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| (1) $a=-15$, $b=18$
(2) $a=-4$, $b=12$

(1) 해가 $2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6<0$$

이고 3을 양변에 곱하면 $3x^2-15x+18<0$이므로 $a=-15$, $b=18$

(2) 해가 $1\le x\le 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2\le 0$이고 음수 a를 양변에 곱하면 $ax^2-3ax+2a\ge 0$이므로 $a=-4$, $b=12$

정답 및 풀이 p.549

개념 그대로

유제 09-1

이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $1<x<3$일 때, 이차부등식 $x^2-bx+a<0$의 해를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-1)(x-3)=x^2-4x+3<0$$

이다. 따라서 $a=-4$, $b=3$이므로 이차부등식 $x^2-bx+a<0$은

$$x^2-bx+a=x^2-3x-4=(x+1)(x-4)<0$$

에서 해는 $-1<x<4$이다.

답 $-1<x<4$

개념 더하기

유제 09-2

+ 이차함수의 그래프와 이차부등식의 관계(p.296)

이차함수 $y=x^2+ax$의 그래프가 직선 $y=3x-b$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위가 $x<-4$ 또는 $x>-2$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

이차함수 $y=x^2+ax$의 그래프가 직선 $y=3x-b$보다 위쪽에 있을 때, $x^2+ax>3x-b$에서 $x^2+(a-3)x+b>0$이다. 이 이차부등식이 해가 $x<-4$ 또는 $x>-2$인 이차부등식

$$(x+4)(x+2)>0 \quad \Rightarrow \quad x^2+6x+8>0$$

과 같으므로 $a-3=6$, $b=8$에서 $a=9$, $b=8$이다.

답 $a=9$, $b=8$

개념 더하기

유제 09-3

+ 부등식 $ax>b$의 풀이(p.281)

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $x\neq3$인 모든 실수일 때, 부등식 $bx+c>0$의 해를 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

해가 $x\neq3$인 모든 실수이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-3)^2>0 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x+9>0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 부등식 $ax^2+bx+c<0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 반대이므로 $a<0$이다. 부등식 ㉠의 양변에 a를 곱한 $ax^2-6ax+9a<0$은 부등식 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로 $b=-6a$, $c=9a$이다. 따라서

$$bx+c=-6ax+9a=-6a\left(x-\frac{3}{2}\right)>0$$

에서 $-6a>0$이므로 구하는 부등식의 해는 $x>\frac{3}{2}$이다.

답 $x>\frac{3}{2}$

09-3 연립이차부등식

연립이차부등식

정 의 상 9.12 **연립이차부등식**

연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 **연립이차부등식**이라 한다.

연립이차부등식을 풀 때에도 연립일차부등식과 마찬가지로 연립부등식을 이루는 각 부등식을 풀고, 이들 해의 공통범위를 찾는다. 다음 연립부등식을 풀어보자.

$$\begin{cases} x-1<0 & \cdots(9.3.1) \\ x^2-x-2\leq 0 & \cdots(9.3.2) \end{cases}$$

(i) 일차부등식 (9.3.1)을 풀면 $x<1$이고

(ii) 이차부등식 (9.3.2)를 풀면 $(x-2)(x+1)\leq 0$에서 $-1\leq x\leq 2$이다.

따라서 (i), (ii)를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $-1\leq x<1$이다.

또한 $A<B<C$의 꼴로 표현된 부등식 $2x^2-x-7<x^2-5<-4x-5$는 같은 꼴의 연립일차부등식과 마찬가지로

$$\begin{cases} 2x^2-x-7<x^2-5 & \cdots(9.3.3) \\ x^2-5<-4x-5 & \cdots(9.3.4) \end{cases}$$

인 연립이차부등식으로 생각하고 풀면 된다.

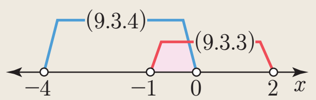


그림 9.8. 부등식 $2x^2-x-7<x^2-5<-4x-5$의 해

(i) 이차부등식 (9.3.3)을 풀면 $(x-2)(x+1)<0$에서 $-1<x<2$이고

(ii) 이차부등식 (9.3.4)를 풀면 $x(x+4)<0$에서 $-4<x<0$이다.

따라서 (i), (ii)를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $-1<x<0$이다.

포인트 상 9.13 **연립이차부등식의 풀이**

- 각각의 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸다.
- 공통범위를 찾아 부등호를 사용하여 나타낸다.

보기 9.9 다음 연립이차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-3x<0 \\ x^2-x-2\leq 0 \end{cases}$ (2) $-4x<x^2\leq x+6$

보기 정답

9.9 (1) $0<x\leq 2$
(2) $0<x\leq 3$

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $x^2-3x+2=0$은 $(x-1)(x-2)=0$에서 서로 다른 두 실근 $x=1$, $x=2$를 가지며 두 실근이 양수임을 알 수 있다. 그러나 이차방정식을 직접 풀지 않고도 두 실근이 양수인지, 음수인지, 부호가 서로 다른지 판단할 수 있다. 이때 **이차방정식의 판별식****(p.166)**과 **이차방정식의 근과 계수의 관계****(p.170)**를 사용한다.

실수 계수의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하자. 먼저 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 $D\geq 0$이어야 한다. 그리고 두 실근의 부호 조건에 따라 다음 조건들을 추가로 만족해야 한다.

- 두 실근 α, β가 모두 양수일 조건은 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이다.
- 두 실근 α, β가 모두 음수일 조건은 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이다.
- 두 실근 α, β의 부호가 서로 다를 조건은 $\alpha\beta<0$이다.

두 실근의 부호가 서로 다른 경우 **이차방정식의 근과 계수의 관계****(p.170)**에 의해 $\alpha\beta=\frac{c}{a}<0$이므로 $ac<0$이다. 즉, 항상 $D=b^2-4ac>0$이므로 판별식의 부호를 확인할 필요가 없다.

포인트 상 9.14 **이차방정식의 실근의 부호**

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 할 때

- 두 근이 모두 양수 $\iff$ $D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
- 두 근이 모두 음수 $\iff$ $D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$
- 두 근이 서로 다른 부호 $\iff$ $\alpha\beta<0$

예시

(1) 이차방정식 $x^2-3x+2=0$에서 판별식 $D=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$, 두 근의 합은 $-\frac{(-3)}{1}=3>0$, 두 근의 곱은 $\frac{2}{1}=2>0$이므로 두 실근은 모두 양수이다.

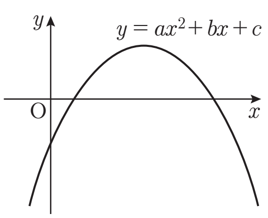
(2) 이차방정식 $x^2+3x+2=0$에서 판별식 $D=3^2-4\times1\times2=1>0$, 두 근의 합은 $-\frac{3}{1}=-3<0$, 두 근의 곱은 $\frac{2}{1}=2>0$이므로 두 실근은 모두 음수이다.

(3) 이차방정식 $x^2-3x-2=0$에서 두 근의 곱이 $\frac{-2}{1}=-2<0$이므로 두 실근의 부호가 서로 다르다.

보기 9.10 오른쪽은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프이다. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, 다음 식의 부호를 결정하시오.

(1) a (2) b^2-4ac

(3) $\alpha+\beta$ (4) $\alpha\beta$



두 실수 x, y의 부호

- 두 실수 x, y가 모두 양수
  $\iff$ $x+y>0$, $xy>0$
- 두 실수 x, y가 모두 음수
  $\iff$ $x+y<0$, $xy>0$
- 두 실수 x, y가 서로 다른 부호
  $\iff$ $xy<0$

보기 정답

9.10 (1) $a<0$
(2) $b^2-4ac>0$
(3) $\alpha+\beta>0$
(4) $\alpha\beta>0$

이차방정식의 근의 분리

이차방정식의 실근의 부호(p.311)는 실근이 0보다 큰 값인지 0보다 작은 값인지를 판단하는 내용에 관한 것이었다. 이를 일반화하면 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프를 이용하여 이차방정식의 두 실근이 p보다 큰 값인지 또는 p보다 작은 값인지를 판단할 수 있다.

이차방정식의 근과 실수 p의 위치 관계

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프를 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 두 근과 실수 p의 위치 관계를 알아보자.

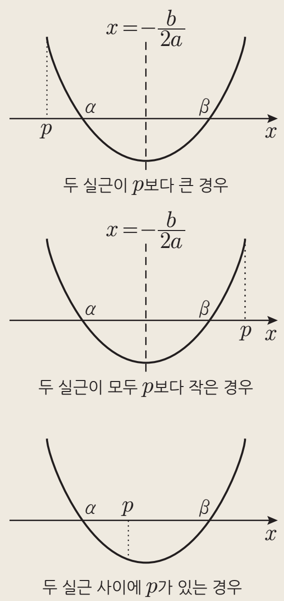


그림 9.9. 이차방정식의 근과 실수 p의 위치 관계

- **두 실근이 모두 p보다 큰 경우**
  - (i) 이차함수의 그래프는 x축과 만나므로 $D\ge 0$
  - (ii) 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 p보다 크므로 $-\dfrac{b}{2a}>p$
  - (iii) 경계점 $x=p$에서의 함숫값이 0보다 크므로 $f(p)>0$
- **두 실근이 모두 p보다 작은 경우**
  - (i) 이차함수의 그래프는 x축과 만나므로 $D\ge 0$
  - (ii) 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 p보다 작으므로 $-\dfrac{b}{2a}<p$
  - (iii) 경계점 $x=p$에서의 함숫값이 0보다 크므로 $f(p)>0$
- **두 실근 사이에 p가 있는 경우**
  - (i) 경계점 $x=p$에서의 함숫값이 0보다 작으므로 $f(p)<0$

포인트 상 9.15 **이차방정식의 근과 실수 p의 위치 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식 D와 실수 p에 대하여

- 두 근이 모두 p보다 크다. $\iff$ $D\ge 0,\ -\dfrac{b}{2a}>p,\ f(p)>0$
- 두 근이 모두 p보다 작다. $\iff$ $D\ge 0,\ -\dfrac{b}{2a}<p,\ f(p)>0$
- 두 근 사이에 p가 있다. $\iff$ $f(p)<0$

예 시

이차방정식 $x^2-2x+k=0$ (k는 실수)에서 $f(x)=x^2-2x+k$라 하자. 이차방정식의 두 근이 모두 -1보다 크려면

$$\frac{D}{4}=1^2-k\ge 0,\quad -\frac{(-2)}{2\cdot 1}=1>-1,\quad f(-1)=3+k>0$$

을 만족해야 한다. 따라서 $-3<k\le 1$이어야 한다.

보기 9.11 이차방정식 $x^2-2kx+4=0$의 두 근이 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 모두 1보다 크다.　　(2) 두 근이 모두 1보다 작다.

(3) 두 근 사이에 1이 있다.

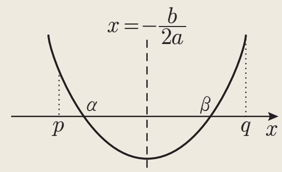
보기 정답

9.11 (1) $2\le k<\dfrac{5}{2}$ (2) $k\le -2$ (3) $k>\dfrac{5}{2}$

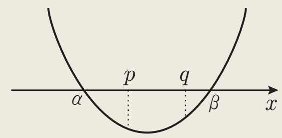
이차방정식의 근과 두 실수 $p,\ q\ (p<q)$의 위치 관계

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$의 그래프를 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 두 근과 실수 $p,\ q\ (p<q)$의 위치 관계를 알아보자.

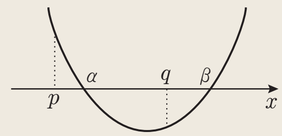
- **두 근이 $p,\ q$ 사이에 있는 경우**
  - (i) 이차함수의 그래프는 x축과 만나므로 $D\geq 0$
  - (ii) 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 p보다 크고 q보다 작으므로 $p<-\dfrac{b}{2a}<q$
  - (iii) 경계점 $x=p,\ x=q$에서의 함숫값이 0보다 크므로 $f(p)>0,\ f(q)>0$
- **두 근 사이에 $p,\ q$가 있는 경우**
  - (i) 경계점 $x=p,\ x=q$에서의 함숫값이 0보다 작으므로 $f(p)<0,\ f(q)<0$
- **두 근 중 한 근만 $p,\ q$ 사이에 있는 경우**
  - (i) 경계점 $x=p,\ x=q$에서의 함숫값의 부호가 서로 다르므로 $f(p)f(q)<0$



두 근이 $p,\ q$ 사이에 있는 경우



두 근 사이에 $p,\ q$가 있는 경우



두 근 중 한 근만 $p,\ q$사이에 있는 경우

그림 9.10. 이차방정식의 근과 두 실수 $p,\ q$의 위치 관계

포인트 상 9.16 **이차방정식의 근과 두 실수 $p,\ q$의 위치 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식 D와 두 실수 $p,\ q\ (p<q)$에 대하여

- 두 근이 $p,\ q$ 사이에 있다.
  $\iff\quad D\geq 0,\ p<-\dfrac{b}{2a}<q,\ f(p)>0,\ f(q)>0$
- 두 근 사이에 $p,\ q$가 있다. $\iff\quad f(p)<0,\ f(q)<0$
- 두 근 중 한 근만 $p,\ q$ 사이에 있다. $\iff\quad f(p)f(q)<0$

예 시 이차방정식 $x^2-2x+k=0$ (k는 실수)에서 $f(x)=x^2-2x+k$라 하자.

(1) 이차방정식의 두 근 사이에 0과 1이 있으려면

$$f(0)<0,\ f(1)<0\quad\Rightarrow\quad k<0,\ k-1<0$$

을 만족해야 한다. 따라서 $k<0$이어야 한다.

(2) 이차방정식의 두 근 중 한 근만 0과 1 사이에 있으려면

$$f(0)f(1)<0\quad\Rightarrow\quad k(k-1)<0$$

을 만족해야 한다. 따라서 $0<k<1$이어야 한다.

보기 9.12 이차방정식 $x^2-2kx+4=0$의 두 근이 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 1, 3 사이에 있다. (2) 두 근 사이에 1, 3이 있다.

(3) 두 근 중 한 근만 1, 3 사이에 있다.

보기 정답

9.12 (1) $2\leq k<\dfrac{13}{6}$ (2) $k>\dfrac{5}{2}$
(3) $\dfrac{13}{6}<k<\dfrac{5}{2}$

연립이차부등식의 풀이

예제 10 다음 연립부등식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} x^2-6x<7 \\ 2x^2 \ge 3x+2 \end{cases}$　　(2) $x^2+3x \le x^2-9 < 3-4x$

길잡이 연립이차부등식은 각각의 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타내고 공통범위를 구한다.

풀 이

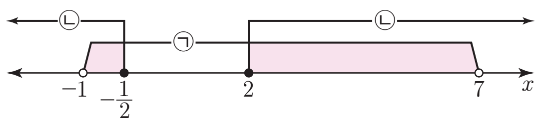
(1) 부등식 $x^2-6x<7$을 풀면

$$x^2-6x-7=(x+1)(x-7)<0 \quad \Rightarrow \quad -1<x<7 \qquad \cdots ㉠$$

이고 부등식 $2x^2 \ge 3x+2$를 풀면

$$2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \le -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x \ge 2 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 연립부등식의 해는 $-1<x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x < 7$이다.

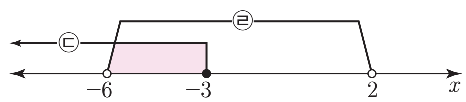
(2) 부등식 $x^2+3x \le x^2-9$를 풀면

$$3x \le -9 \quad \Rightarrow \quad x \le -3 \qquad \cdots ㉢$$

이고 부등식 $x^2-9<3-4x$를 풀면

$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)<0 \quad \Rightarrow \quad -6<x<2 \qquad \cdots ㉣$$

이다. ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 연립부등식의 해는 $-6<x\le -3$이다.

정답 (1) $-1<x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $2\le x<7$　(2) $-6<x\le -3$

- 연립이차부등식의 풀이(p.310)
- 이차부등식의 해(p.299)
- 부등식의 기본 성질(p.280)

돌다리 두드리기

다음 연립부등식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} x^2+x \ge -x^2+3 \\ 2x^2-3x < x^2+x-3 \end{cases}$　　(2) $x^2-9<x^2+6x \le -5$

(1) $x^2+x \ge -x^2+3 \Rightarrow (2x+3)(x-1) \ge 0 \Rightarrow x \ge 1,\ x \le -\frac{3}{2}$
$2x^2-3x<x^2+x-3 \Rightarrow (x-1)(x-3)<0 \Rightarrow 1<x<3$
이므로 공통범위는 $1<x<3$이다.

(2) $x^2-9<x^2+6x \Rightarrow 6x>-9 \Rightarrow x>-\frac{3}{2}$
$x^2+6x \le -5 \Rightarrow (x+1)(x+5) \le 0 \Rightarrow -5 \le x \le -1$
이므로 공통범위는 $-\frac{3}{2}<x\le -1$이다.

돌다리 두드리기

|답| (1) $1<x<3$　(2) $-\frac{3}{2}<x\le -1$

정답 및 풀이 p.549

개념 그대로

유제 10-1

다음 연립부등식의 해를 구하시오.

(1) $5<x^2+5x+9\le -x$ (2) $\begin{cases} x^2+x>3(x-3) \\ 2x(x-1)\le x-1 \end{cases}$

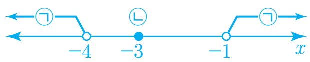
(1) 부등식 $5<x^2+5x+9$를 풀면

$$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)>0$$
$$\Rightarrow\ x<-4 \text{ 또는 } x>-1 \qquad \cdots ㉠$$

이고 부등식 $x^2+5x+9\le -x$를 풀면

$$x^2+6x+9=(x+3)^2\le 0 \quad \Rightarrow \quad x=-3 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 연립부등식의 해는 없다.

(2) 부등식 $x^2+x>3x-9$를 풀면

$$x^2-2x+9=(x-1)^2+8>0 \quad \Rightarrow \quad \text{해는 모든 실수} \qquad \cdots ㉢$$

이고, 부등식 $2x(x-1)\le x-1$을 풀면

$$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)\le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\le x\le 1 \qquad \cdots ㉣$$

이다. 따라서 ㉢, ㉣에서 구하는 연립부등식의 해는 $\frac{1}{2}\le x\le 1$이다.

답 (1) 해는 없다. (2) $\frac{1}{2}\le x\le 1$

개념 그대로

유제 10-2

부등식 $6x+7<x^2\le -4x+5$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

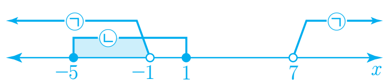
부등식 $6x+7<x^2$을 풀면

$$x^2-6x-7=(x+1)(x-7)>0 \quad \Rightarrow \quad x<-1 \text{ 또는 } x>7 \qquad \cdots ㉠$$

이고 부등식 $x^2\le -4x+5$를 풀면

$$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)\le 0 \quad \Rightarrow \quad -5\le x\le 1 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-5\le x<-1$이고 이를 만족하는 정수 x는 $-5,\ -4,\ -3,\ -2$이다. 즉, 구하는 정수 x의 개수는 4이다.

답 4

개념 더하기

유제 10-3

+ 절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 풀이(p.284)

연립부등식 $\begin{cases} |x-4|+x<6 \\ x^2-x\le 5(x-1) \end{cases}$ 의 해를 구하시오.

(i) 부등식 $|x-4|+x<6$을 풀면 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 x의 값은 4이다.

i) $x<4$일 때, $x-4<0$이므로

$$|x-4|+x=-(x-4)+x=4<6$$

이므로 $x<4$에서 부등식이 항상 성립한다.

ii) $x\ge 4$일 때, $x-4\ge 0$이므로

$$|x-4|+x=(x-4)+x=2x-4<6 \quad \Rightarrow \quad x<5$$

이다. 따라서 $x\ge 4$와 $x<5$의 공통범위는 $4\le x<5$이다.

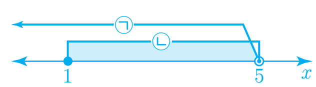
i), ii)에 의하여 부등식 $|x-4|+x<6$의 해는

$$x<5 \qquad \cdots ㉠$$

(ii) 부등식 $x^2-x\le 5(x-1)$을 풀면

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)\le 0 \quad \Rightarrow \quad 1\le x\le 5 \qquad \cdots ㉡$$

(i), (ii)에 의하여 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 연립부등식의 해는 $1\le x<5$이다.

답 $1\le x<5$

해가 주어진 연립이차부등식

예제 11

연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x-6\le 0 \\ x^2-(a+1)x+a>0 \end{cases}$ 의 해가 $1<x\le 6$이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

| 길잡이 | 연립부등식의 해가 주어진 경우 각각의 부등식의 해를 구한 다음, 해의 공통부분이 주어진 해와 일치하도록 수직선 위에 나타낸다.

| 풀 이 |

1 • 이차부등식의 해(p.299)

1단계 각각의 부등식의 해를 구한다.

부등식 $x^2-5x-6\le 0$을 풀면

$$x^2-5x-6=(x+1)(x-6)\le 0 \quad \Rightarrow \quad -1\le x\le 6 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 부등식 $x^2-(a+1)x+a>0$을 풀면

$$x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)>0 \qquad \cdots ㉡$$

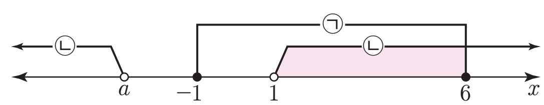
이므로 a의 값에 따라 부등식 ㉡의 해는 다음과 같다.

(i) $a<1$일 때, $x<a$ 또는 $x>1$
(ii) $a=1$일 때, $x\ne a$인 모든 실수
(iii) $a>1$일 때, $x<1$ 또는 $x>a$

2 • 연립이차부등식의 풀이(p.310)

2단계 해의 공통부분이 주어진 연립부등식의 해와 일치하도록 수직선 위에 나타낸다.

연립부등식의 해가 $1<x\le 6$이 되기 위해서는 ㉠과 ㉡을 수직선 위에 나타내었을 때, 공통부분이 그림과 같아야 한다.



따라서 $a\le -1$이다.

| 정답 | $a\le -1$

돌다리 두드리기

연립부등식 $\begin{cases} x^2-7x+6<0 \\ x^2-(a+2)x+2a\ge 0 \end{cases}$ 의 해가 $1<x\le 2$이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $a\ge 6$

$(x-1)(x-6)<0 \Rightarrow 1<x<6$이고 $(x-2)(x-a)\ge 0$에서
(i) $a<2$일 때, 해는 $x\ge 2$ 또는 $x\le a$
(ii) $a=2$일 때, 해는 모든 실수
(iii) $a>2$일 때, 해는 $x\ge a$ 또는 $x\le 2$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $a\ge 6$이다.

정답 및 풀이 p.550

개념 더하기

유제 11-1

+ 해가 주어진 이차부등식(p.301)

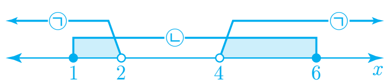
연립부등식 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ x^2+ax+b\le 0 \end{cases}$ 의 해가 $1\le x<2$ 또는 $4<x\le 6$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

주어진 연립부등식을 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 & \cdots ㉠ \\ x^2+ax+b\le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

부등식 ㉠을 풀면

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)>0 \quad \Rightarrow \quad x<2 \text{ 또는 } x>4$$

이다. 한편, 연립부등식의 해가 $1\le x<2$ 또는 $4<x\le 6$이므로 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 부등식 ㉡의 해는 $1\le x\le 6$이다.

해가 $1\le x\le 6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-1)(x-6)=x^2-7x+6\le 0$$

이므로 $a=-7$, $b=6$이다.

답 $a=-7$, $b=6$

개념 그대로

유제 11-2

연립부등식 $\begin{cases} 2x(x-2)>5(x+1) \\ x^2-(2k+7)+14k<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수가 6뿐일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

부등식 $2x(x-2)>5(x+1)$을 풀면

$$2x^2-9x-5=(2x+1)(x-5)>0 \quad \Rightarrow \quad x<-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x>5 \qquad \cdots ㉠$$

이다. $x^2-(2k+7)+14k<0$을 풀면

$$x^2-(2k+7)+14k=(x-2k)(x-7)<0 \qquad \cdots ㉡$$

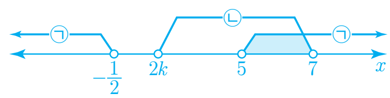
이므로 k의 값에 따라 부등식 ㉡의 해는 다음과 같다.

(i) $k<\frac{7}{2}$일 때, $2k<x<7$

(ii) $k=\frac{7}{2}$일 때, 해가 없다.

(iii) $k>\frac{7}{2}$일 때, $7<x<2k$

연립부등식의 해의 범위에 정수가 6뿐이려면 ㉠과 ㉡을 수직선 위에 나타내었을 때, 공통범위가 그림과 같아야 한다.



따라서 $-1\le 2k<6$에서 $-\frac{1}{2}\le k<3$이다.

답 $-\frac{1}{2}\le k<3$

개념 더하기

유제 11-3

+ 절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 풀이(p.284)

연립부등식 $\begin{cases} |x-2|<k \\ x^2-2x-3\le 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수가 5일 때, 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

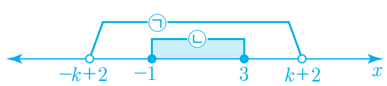
부등식 $|x-2|<k$를 풀면

$$-k<x-2<k \quad \Rightarrow \quad -k+2<x<k+2 \qquad \cdots ㉠$$

이고 부등식 $x^2-2x-3\le 0$을 풀면

$$(x-3)(x+1)\le 0 \quad \Rightarrow \quad -1\le x\le 3 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉡에 포함되는 정수가 $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 5개이다. 따라서 조건을 만족하려면 ㉠과 ㉡을 수직선 위에 나타내었을 때, 공통범위가 그림과 같아야 한다.



즉, $-k+2<-1$이고 $k+2>3$이어야 하므로 $k>3$이다. 따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

답 4

예제 12 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+6=0$의 두 근이 다음 조건을 만족할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 모두 양수이다. (2) 두 근이 모두 음수이다.

(3) 두 근의 부호가 서로 다르다.

길잡이 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 할 때

- 두 근이 모두 양수 $\iff$ $D\ge 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
- 두 근이 모두 음수 $\iff$ $D\ge 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$
- 두 근이 서로 다른 부호 $\iff$ $\alpha\beta<0$

임을 이용하여 이차방정식의 실근의 부호를 판별할 수 있다.

풀 이

- 이차방정식의 실근의 부호(p.311)
- 연립이차부등식의 풀이(p.310)
- 부등식의 기본 성질(p.280)
- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)
- 이차방정식의 판별식(p.166)

공통 주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 할 때

- $D=(k+3)^2-4(k+6)=k^2+2k-15=(k-3)(k+5)$
- $\alpha+\beta=-(k+3)$ • $\alpha\beta=k+6$

이 성립하므로 이를 이용하여 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

(1) 두 근이 모두 양수이면 $D\ge 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$에서

$$D=(k-3)(k+5)\ge 0 \Rightarrow k\le -5 \text{ 또는 } k\ge 3 \quad \cdots ㉠$$
$$\alpha+\beta=-(k+3)>0 \Rightarrow k<-3 \quad \cdots ㉡$$
$$\alpha\beta=k+6>0 \Rightarrow k>-6 \quad \cdots ㉢$$

이므로 ㉠, ㉡, ㉢의 공통범위를 구하면 $-6<k\le -5$이다.

(2) 두 근이 모두 음수이면 $D\ge 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$에서

$$D=(k-3)(k+5)\ge 0 \Rightarrow k\le -5 \text{ 또는 } k\ge 3 \quad \cdots ㉣$$
$$\alpha+\beta=-(k+3)<0 \Rightarrow k>-3 \quad \cdots ㉤$$
$$\alpha\beta=k+6>0 \Rightarrow k>-6 \quad \cdots ㉥$$

이므로 ㉣, ㉤, ㉥의 공통범위를 구하면 $k\ge 3$이다.

(3) 두 근의 부호가 서로 다를 때, $\alpha\beta=k+6<0$이므로 $k<-6$이다.

정답 (1) $-6<k\le -5$ (2) $k\ge 3$ (3) $k<-6$

돌다리 두드리기

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k+3=0$의 두 근이 음수일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(i) $\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+3)=k^2+k-2$
$=(k+2)(k-1)\ge 0 \Rightarrow k\le -2$ 또는 $k\ge 1$
(ii) $\alpha+\beta=2(k+1)<0 \Rightarrow k<-1$
(iii) $\alpha\beta=k+3>0 \Rightarrow k>-3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는 $-3<k\le -2$

돌다리 두드리기
|답| $-3<k\le -2$

정답 및 풀이 p.550

개념 그대로

유제 12-1

x에 대한 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k-4=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 다음 조건을 만족한다.

(i) $D=\{-(k+2)\}^2-4(k-4)=k^2+20>0$이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $\alpha+\beta=k+2>0$이므로 $k>-2$이다.

(iii) $\alpha\beta=k-4>0$이므로 $k>4$이다.

구하는 k의 값의 범위는 (i), (ii), (iii)의 공통범위이므로 $k>4$이다.

답 $k>4$

개념 그대로

유제 12-2

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+a^2-4a+3=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 다음 조건을 만족한다.

(i) $\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-4a+3)=2a-2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad a\geq 1$

(ii) $\alpha+\beta=-2(a-1)<0 \quad\Rightarrow\quad a>1$

(iii) $\alpha\beta=a^2-4a+3=(a-1)(a-3)>0 \quad\Rightarrow\quad a<1$ 또는 $a>3$

구하는 a의 값의 범위는 (i), (ii), (iii)의 공통범위이므로 $a>3$이다.

답 $a>3$

개념 바꾸기

유제 12-3

- 연립이차부등식의 풀이(p.310)
- 이차방정식의 판별식(p.166) + 이차부등식의 해(p.299)

x에 대한 이차방정식 $(k^2+1)x^2-4x=-k^2+2k+8$의 두 근의 부호가 서로 다를 때 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

주어진 이차방정식을 정리하면 $(k^2+1)x^2-4x+k^2-2k-8=0$이다. 이 이차방정식의 두 근을 α, β라 할 때, 두 근의 곱은 음수이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=\frac{k^2-2k-8}{k^2+1}<0$$

이다. $\frac{k^2-2k-8}{k^2+1}<0$에서 $k^2+1>0$이므로

$$k^2-2k-8=(k+2)(k-4)<0$$

이다. 따라서 k의 값의 범위는 $-2<k<4$이다.

답 $-2<k<4$

이차방정식의 근의 위치

예제 13 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x-3(k-1)=0$의 두 근이 다음 조건을 만족할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 모두 1보다 크다.

(2) 두 근 중 한 근만 -1과 3 사이에 있다.

길잡이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 위치는

- 이차방정식의 **판별식 $D=b^2-4ac$**
- 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 **꼭짓점의 x좌표 $-\dfrac{b}{2a}$**
- 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 **경계점에서의 함숫값 부호**

를 이용하여 판단할 수 있다.

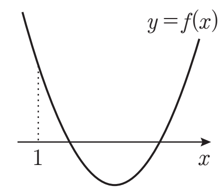
풀이

공통 $f(x)=x^2+2(k-1)x-3(k-1)$이라 하자. 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

- $\dfrac{D}{4}=(k-1)^2+3(k-1)=k^2+k-2=(k-1)(k+2)$
- 이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $-\dfrac{2(k-1)}{2}=1-k$

이므로 이를 이용하여 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

(1) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$이 두 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2+3(k-1)=(k-1)(k+2)\geq 0$$

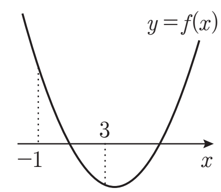
에서 $k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$이다.

(ii) 이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 1보다 크므로 $1-k>1$에서 $k<0$이다.

(iii) $x=1$에서의 함숫값이 양수이므로 $f(1)=1+2k-2-3k+3=-k+2>0$에서 $k<2$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는 $k\leq -2$이다.

(2) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 중 한 근만 -1과 3 사이에 있을 때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 따라서 두 함숫값 $f(-1)$과 $f(3)$의 부호가 다르다. $f(-1)f(3)<0$에서



$$\begin{aligned} f(-1)f(3)&=(-5k+6)(3k+6)\\ &=-3(5k-6)(k+2)<0 \end{aligned}$$

이므로 $k<-2$ 또는 $k>\dfrac{6}{5}$이다.

정답 (1) $k\leq -2$ (2) $k<-2$ 또는 $k>\dfrac{6}{5}$

- 이차방정식의 근과 실수 p의 위치 관계(p.312)
- 연립이차부등식의 풀이(p.310)
- 부등식의 기본 성질(p.280)
- 이차방정식의 판별식(p.166)

돌다리 두드리기

x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$의 두 근이 다음 조건을 만족할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 모두 0보다 크다. (2) 두 근 중 한 근만 -1과 2 사이에 있다.

돌다리 두드리기

|답| (1) $k\geq 7$ (2) $k<-1$ 또는 $k>8$

(1) (i) $D=k^2-6k-7=(k-7)(k+1)\geq 0$
$\Rightarrow k\leq -1$ 또는 $k\geq 7$
(ii) $x=0$ 일때 $k+2>0\Rightarrow k>-2$
(iii) 꼭짓점 x좌표 $\dfrac{k-1}{2}>0\Rightarrow k>1$
(i), (ii), (iii)에 의하여 $k\geq 7$

(2) $f(-1)f(2)=(2k+2)(-k+8)=-2(k+1)(k-8)<0$에서
$k<-1$ 또는 $k>8$

정답 및 풀이 p.551

개념 그대로

유제 13-1

x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx-2k+3=0$의 두 근이 다음 조건을 만족할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 근이 모두 3보다 작다.   (2) 두 근 사이에 4가 있다.

$f(x)=x^2+2kx-2k+3$, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하자.

(1) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 3보다 작을 때,

(i) 이차방정식 $f(x)=0$이 두 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=k^2-(3-2k)=(k+3)(k-1)\ge 0$$

에서 $k\le -3$ 또는 $k\ge 1$이다.

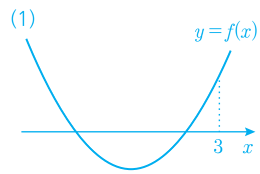
(ii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 3보다 작으므로

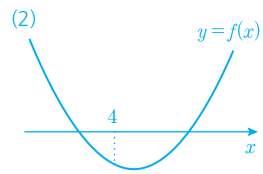
$-\frac{2k}{2}=-k<3$에서 $k>-3$이다.

(iii) $x=3$에서의 함숫값이 양수이므로 $f(3)=4k+12>0$에서 $k>-3$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는 $k\ge 1$이다.

(2) 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 4가 있고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $f(4)<0$이다. 즉, $f(4)=6k+19<0$에서 $k<-\frac{19}{6}$이다.





답 (1) $k\ge 1$ (2) $k<-\frac{19}{6}$

개념 줄이기

유제 13-2

– 이차방정식의 판별식(p.166)

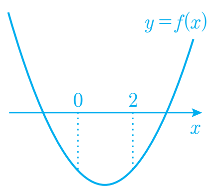
x에 대한 이차방정식 $x^2+(n-8)x+3-n=0$의 두 근 사이에 0, 2가 있을 때, 자연수 n의 개수를 구하시오.

$f(x)=x^2+(n-8)x+3-n$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 0, 2가 있을 때 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 이차함수 $f(x)$가 아래로 볼록하므로

(i) $f(0)=3-n<0$에서 $n>3$이다.

(ii) $f(2)=4+2n-16+3-n=n-9<0$ 에서 $n<9$이다.

(i), (ii)의 공통범위는 $3<n<9$이고 이를 만족시키는 자연수 n은 4, 5, 6, 7, 8이다. 따라서 자연수 n의 개수는 5이다.



답 5

개념 줄이기

유제 13-3

– 이차방정식의 판별식(p.166)

두 이차방정식 $x^2+ax+a+1=0$과 $3x^2+2ax-a=0$이 모두 두 근 중 한 근만 -1과 1 사이에 있을 때, a의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^2+ax+a+1$이라 하고 $g(x)=3x^2+2ax-a$라 하면 방정식 $f(x)=0$의 한 근만 -1과 1 사이에 있으므로

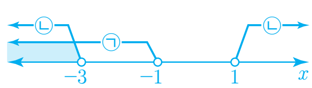
$$f(-1)f(1)=2\cdot(2+2a)<0 \quad \Rightarrow \quad a<-1 \qquad \cdots ㉠$$

이고 방정식 $g(x)=0$의 한 근만 -1과 1 사이에 있으므로

$$g(-1)g(1)=(3-3a)(3+a)<0$$

$$\Rightarrow \quad a<-3 \text{ 또는 } a>1 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a<-3$이다.

답 $a<-3$

연습은 실전처럼

09-1 연립일차부등식 [1-4]

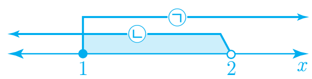
다음 부등식의 해를 구하시오.

(1) $3x+2<x+6\leq 5(x-2)+12$

(2) $2|x+1|-|x-4|>7$

(1) 주어진 **부등식(p.283)**은 $\begin{cases} 3x+2<x+6 & \cdots ㉠ \\ x+6\leq 5(x-2)+12 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 라 하자.

부등식 ㉠, ㉡을 풀어 해를 수직선 위에 나타내면



(2) **절댓값(p.155)** 기호 안의 식 $x+1$, $x-4$의 값이 0이 되는 x의 값은 각각 -1, 4이므로 x의 값의 범위는

$$x<-1,\quad -1\leq x<4,\quad x\geq 4$$

와 같이 세 범위로 나누어서 풀면, 각각 $x<-13$, $x>1$, $x\geq 4$이므로 공통범위는 $x<-13$ 또는 $x>3$이다.

답 (1) $1\leq x<2$
(2) $x<-13$ 또는 $x>3$

09-2

네 실수 a, b, c, d에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

[보기]

ㄱ. $a>b$, $c>d$이면 $a+c>b+d$이다.

ㄴ. $a>b>0$이면 $a^2>b^2$이다.

ㄷ. $a>b$, $ab<0$이면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다.

ㄱ. (참) $a>b$에서 $a+c>b+c$이고 $c>d$에서 $b+c>b+d$이므로

$$a+c>b+c>b+d$$

ㄴ. (참) $a>b$의 양변에 양수 a를 곱하면 $a^2>ab$이고 $a>b$에서 양변에 양수 b를 곱하면 $ab>b^2$이므로

$$a^2>ab>b^2$$

ㄷ. (거짓) $a>b$의 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$이므로 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

09-3

부등식 $||x-1|-4|<4$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

주어진 **절댓값을 포함한 부등식(p.285)**을 계산하면

$$||x-1|-4|<4 \quad\Rightarrow\quad -4<|x-1|-4<4$$

에서 $0<|x-1|<8$이다.

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로 주어진 **부등식(p.281)**은

$$0<-(x-1)<8 \quad\Rightarrow\quad -7<x<1$$

이므로 구하는 부등식의 해는 $x<1$과 $-7<x<1$의 공통범위로 $-7<x<1$이다.

(ii) $x\geq 1$일 때, $x-1\geq 0$이므로 주어진 부등식은

$$0<x-1<8 \quad\Rightarrow\quad 1<x<9$$

이므로 구하는 **부등식의 해(p.282)**는 $x\geq 1$과 $1<x<9$의 공통범위로 $1<x<9$이다.

(i), (ii)에 의하여 $-7<x<1$ 또는 $1<x<9$이다. 따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 -6부터 8까지 1을 제외한 정수이고 그 개수는 14이다.

답 14

09-4

x에 대한 부등식 $(a-b)x+2a-3b>0$의 해가 $x<-1$일 때, 부등식 $(b-a)x-a-6b<0$의 해를 구하시오. (단, $a\neq b$이다.)

$a\neq b$일 때, 주어진 **부등식(p.281)**은 $(a-b)x>-2a+3b$와 같고 이 부등식의 해가 $x<-1$이므로 **부등식의 성질(p.280)**에 의하여 $a-b<0$이다. 즉 $x<\frac{-2a+3b}{a-b}$와 $x<-1$의 해가 같으므로

$$\frac{-2a+3b}{a-b}=-1 \quad\Rightarrow\quad a=2b$$

이다. 또한 $a-b<0$ 이므로 $b-a>0$이다.

따라서 부등식 $(b-a)x-a-6b<0$를 정리하였을 때,

$$(b-a)x<a+6b \quad\Rightarrow\quad x<\frac{a+6b}{b-a} \quad\Rightarrow\quad x<-8$$

이므로 구하는 부등식의 해는 $x<-8$이다.

답 $x<-8$

09-5 이차부등식 [5-8]

다음 이차부등식의 해를 구하시오.

(1) $4x^2-4x+1>0$ (2) $-x^2+3x\leq 2x-6$

(1) 주어진 **부등식(p.299)**을 정리하여 풀면

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2>0$$

에서 $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수이다.

(2) 주어진 **부등식(p.299)**을 정리하여 풀면

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)\geq 0$$

에서 부등식의 해는 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$이다.

답 (1) $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수
(2) $x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$

09-6

부등식 $|3x-5|<1$의 해가 x에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해와 같을 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

부등식(p.284) $|3x-5|<1$에서 $-1<3x-5<1$이므로

$$\frac{4}{3}<x<2 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 해가 ㉠이고 x^2의 계수가 1인 **이차부등식(p.301)**은

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)=x^2-\frac{10}{3}x+\frac{8}{3}$$

이므로 $a=-\frac{10}{3}$, $b=\frac{8}{3}$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=-\frac{2}{3}$이다.

답 $-\frac{2}{3}$

09-7

x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 $x=3$뿐일 때, x에 대한 이차부등식 $bx^2+cx+6a<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 $x=3$뿐이므로 $a<0$이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 $x=3$을 중근으로 가지므로

$$ax^2+bx+c=a(x-3)^2=ax^2-6ax+9a$$

이다. 따라서 $b=-6a$, $c=9a$이고, 부등식

$$\begin{aligned}bx^2+cx+6a&=-6ax^2+9ax+6a\\&=-3a(2x^2-3x-2)\\&=-3a(2x+1)(x-2)<0\end{aligned}$$

에서 $-3a>0$이므로 이 **부등식(p.299)**을 만족시키는 해는 $-\frac{1}{2}<x<2$이다. 따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1로 2개이다.

답 2개

09-8

x에 대한 두 이차부등식 $-x^2+kx-k<0$, $x^2+2kx+k+6\geq 0$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

(i) **이차부등식(p.299)** $-x^2+kx-k<0$의 양변에 -1을 곱하면 $x^2-kx+k>0$이다. 이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-kx+k=0$의 **판별식(p.166)** D에 대하여

$$D=k^2-4k=k(k-4)<0$$

가 되어야 한다. 따라서 k의 범위는 $0<k<4$이다.

(ii) 이차부등식 $x^2+2kx+k+6<0$의 해가 모든 실수이면 이차방정식 $x^2+2kx+k+6=0$의 판별식 D에 대하여 $D\leq 0$이 성립해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=k^2-1\cdot(k+6)=k^2-k-6\\&=(k+2)(k-3)\leq 0\end{aligned}$$

이 되어야 하고 이때의 k의 범위는 $-2\leq k\leq 3$이다.

(i), (ii)에 의하여 $0<k\leq 3$이므로 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 1, 2, 3으로 그 개수는 3이다.

답 3

09-9 연립이차부등식 [9-12]

다음 연립부등식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases}2x^2<x^2-6x+7\\-2x^2+5x-4\leq 0\end{cases}$

(2) $-2x^2+4\leq x^2-5x+6<2x-4$

(1) **부등식(p.299)** $2x^2<x^2-6x+7$을 풀면 $-7<x<1$이고 모든 실수에서 $2x^2-5x+4>0$이 성립하므로 구하는 **부등식의 해(p.310)**는 $-7<x<1$이다.

(2) 부등식 $-2x^2+4\leq x^2-5x+6$을 풀면

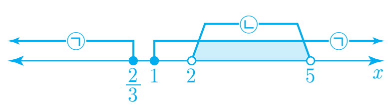
$$3x^2-5x+2=(3x-2)(x-1)\geq 0$$

$$\Rightarrow\quad x\leq\frac{2}{3}\text{ 또는 }x\geq 1 \qquad\cdots ㉠$$

이고 부등식 $x^2-5x+6<2x-4$를 풀면

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)<0\quad\Rightarrow\quad 2<x<5 \qquad\cdots ㉡$$

이다. 따라서 구하는 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통범위로 그림과 같이 $2<x<5$이다.



답 (1) $-7<x<1$
(2) $2<x<5$

09-10

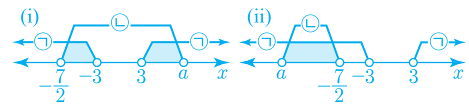
연립부등식 $\begin{cases}x^2-9>0\\2x^2+(7-2a)x-7a<0\end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 값이 두 개일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

부등식(p.299) $x^2>9$를 풀면 $x<-3$ 또는 $x>3\cdots㉠$ 이고

부등식 $2x^2+(7-2a)x-7a<0$을 풀면 $(2x+7)(x-a)<0\cdots㉡$

(i) $-\frac{7}{2}<x<a$일 때, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 두 개이므로 그림과 같이 그 해는 4, 5이다. 따라서 a의 값의 범위는 $5<a\leq 6$이어야 한다.

(ii) $a<x<-\frac{7}{2}$일 때, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 두 개이므로 그림과 같이 그 해는 -4, -5이다. 따라서 a의 값의 범위는 $-6\leq a<-5$이어야 한다.



(i), (ii)에 의하여 상수 a의 값의 범위는 $-6\leq a<-5$ 또는 $5<a\leq 6$이다.

답 $-6\leq a<-5$ 또는 $5<a\leq 6$

09-11

부등식 $x|x+1|-|x|+4\geq 0$의 해를 구하시오.

주어진 **절댓값을 포함한 부등식(p.285)**에서 절댓값 안의 값 $x+1$, x가 0이 되도록 하는 x는 $x=-1$, $x=0$이다.

(i) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x<0$이므로 주어진 **부등식(p.299)**을 풀면

$$x|x+1|-|x|+4=-x^2+4\geq 0\quad\Rightarrow\quad x^2-4=(x+2)(x-2)\leq 0$$

이므로 $-2\leq x\leq 2$이다. 따라서 부등식의 해는 $x<-1$과 $-2\leq x\leq 2$의 공통범위로 $-2\leq x<-1$이다.

(ii) $-1\leq x<0$일 때, $x+1>0$, $x<0$이므로 주어진 부등식은

$$x|x+1|-|x|+4=(x+1)^2+3\geq 0$$

이므로 해는 $-1\leq x<0$인 모든 실수이다.

(iii) $x\geq 0$일 때, $x+1>0$, $x>0$이므로 주어진 부등식은

$$x|x+1|-|x|+4=x^2+4\geq 0$$

이므로 해는 모든 실수이다. 따라서 부등식의 해는 $x\geq 0$이다.

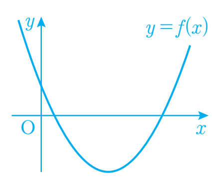
(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x\geq -2$이다.

답 $x\geq -2$

09-12

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-6)x+k^2+9=0$의 두 실근이 모두 양수가 되도록 하는 k의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^2+2(k-6)x+k^2+9$라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 모두 0보다 클 때 다음 **조건(p.311)**을 만족시킨다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고, **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-6)^2-(k^2+9)=-12k+27\geq 0$$

에서 $k\leq\frac{9}{4}$이다.

(ii) $\alpha+\beta=-2(k-6)>0\quad\Rightarrow\quad k<6$

(iii) $\alpha\beta=k^2+9>0\quad\Rightarrow\quad k$는 모든 실수

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는 $k\leq\frac{9}{4}$이다.

답 $k\leq\frac{9}{4}$

실전은 연습처럼

09-1

연립부등식 $\begin{cases} |x-3|<2+|x-6| \\ |2x-9|<5 \end{cases}$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

주어진 **연립부등식(p.283)**을

$$\begin{cases} |x-3|-|x-6|-2<0 & \cdots ㉠ \\ |2x-9|<5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하자. **부등식(p.285)** ㉠의 **절댓값(p.155)** 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x는 각각 $x=3$, $x=6$이다.

(i) $x<3$일 때, $x-3<0$, $x-6<0$이므로 부등식 ㉠은

$$|x-3|-|x-6|-2=-(x-3)+(x-6)-2=-5<0$$

이므로 해는 모든 실수이다. 따라서 부등식의 해는 $x<3$이다.

(ii) $3\le x<6$일 때, $x-3\ge 0$, $x-6<0$이므로 부등식 ㉠은

$$|x-3|-|x-6|-2=x-3+(x-6)-2=2x-11<0 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{11}{2}$$

이다. 따라서 $3\le x<6$과 $x<\frac{11}{2}$의 공통범위는 $3\le x<\frac{11}{2}$이다.

(iii) $x\ge 6$일 때, $x-3\ge 0$, $x-6\ge 0$이므로 부등식 ㉠은

$$|x-3|-|x-6|-2=-3+6-2=1<0$$

이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 부등식 ㉠의 해는 $x<\frac{11}{2}$이고 **부등식(p.284)** ㉡을 풀면

$$-5<2x-9<5 \quad \Rightarrow \quad 2<x<7$$

이므로 $x<\frac{11}{2}$과 $2<x<7$의 공통범위는 $2<x<\frac{11}{2}$이므로 이를 만족시키는 정수 x는 3, 4, 5이고 그 개수는 3이다.

답 3

09-2

이차함수 $y=x^2-2(k+1)x+2ka+5$의 그래프가 k의 값에 관계없이 직선 $y=4x$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

$x^2-2(k+1)x+2ka+5=4x$를 정리하면

$$x^2-2(k+3)x+2ka+5=0$$

이다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 **판별식(p.166)** D에 대하여

$$\frac{D}{4}=(k+3)^2-2ka-5=k^2-2(a-3)k+4>0$$

가 성립한다. 모든 실수 k에 대하여 위의 **부등식이 성립(p.300)**해야 하므로, k에 대한 이차방정식 $k^2-2(a-3)k+4=0$의 판별식 D'에 대하여

$$\frac{D'}{4}=(a-3)^2-4<0 \quad \Rightarrow \quad (a-5)(a-1)<0$$

이므로 $1<a<5$이다.

답 $1<a<5$

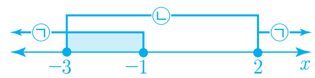
09-3

연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b\ge 0 \\ x^2+cx+d\le 0 \end{cases}$의 해가 $-3\le x\le -1$ 또는 $x=2$일 때, 상수 a, b, c, d의 합 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

주어진 **연립부등식(p.310)**을

$$\begin{cases} x^2+ax+b\ge 0 & \cdots ㉠ \\ x^2+cx+d\le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하자. ㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위가 $-3\le x\le -1$ 또는 $x=2$이므로 그림과 같이 ㉠은 $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$의 해를 가져야 하고 ㉡은 $-3\le x\le 2$의 해를 가져야 한다.



즉 각각의 **부등식(p.301)**은

$$(x+1)(x-2)=x^2-x-2\ge 0$$

에서 $a=-1$, $b=-2$이고

$$(x+3)(x-2)=x^2+x-6\le 0$$

에서 $c=1$, $d=-6$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c+d=-8$이다.

답 -8

09-4

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x-9\le ax+b\le x^2+5x+3$이 성립하도록 하는 b의 값의 범위가 $\alpha\le b\le\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

(i) 모든 실수 x에 대하여

$$ax+b\ge -x-9$$

이 성립하여야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 **부등식(p.281)** $(a+1)x+b+9\ge 0$이 성립하여야 하므로

$$a=-1, \quad b\ge -9$$

(ii) 모든 실수 x에 대하여

$$ax+b\le x^2+5x+3$$

이 **성립(p.300)**하여야 하고 (i)에서 $a=-1$이므로 이 값을 부등식에 대입하여 정리하면 $x^2+6x+3-b\ge 0$가 모든 실수 x에 대하여 성립하여야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2+6x+3-b=0$의 **판별식(p.166)**을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-(3-b)=6+b\le 0$$

에서 $b\le -6$이다.

(i), (ii)에 의하여 $-9\le b\le -6$이므로 $\alpha=-9$, $\beta=-6$이고 $\alpha\beta=54$이다.

답 54

09-5

사차방정식 $x^4-2x^2-k+3=0$의 근이 모두 실수가 되도록 하는 상수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

$x^2=X$로 치환하면 주어진 방정식은

$$X^2-2X-k+3=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 주어진 **사차방정식(p.220)**의 근이 모두 실수가 되려면 X에 대한 방정식 ㉠이 양의 실근이나 0을 근으로 가져야 한다. 방정식 ㉠의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 다음 **조건(p.311)**을 만족한다.

(i) $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(-k+3)\geq 0 \quad \Rightarrow \quad k\geq 2$

(ii) $\alpha+\beta=2\geq 0$

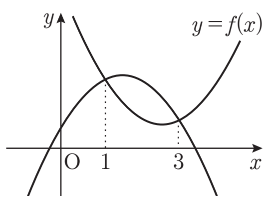
(iii) $\alpha\beta=-k+3\geq 0 \quad \Rightarrow \quad k\leq 3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 k의 값의 범위는 $2\leq k\leq 3$이고 $M=3$, $m=2$에서 $M+m=5$이다.

답 5

09-6

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $f\left(\dfrac{x-2}{3}\right)\leq g\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.



$t=\dfrac{x-2}{3}$으로 놓자. 이때 $f(t)\leq g(t)$를 만족시키는 t의 값의 범위는 함수 $f(t)$의 **그래프(p.296)**가 함수 $g(t)$의 그래프와 만나거나 그 아래에 있는 t의 값의 범위이므로 $1\leq t\leq 3$과 같다. 따라서 구하는 x의 값의 범위는 **연립부등식(p.283)**

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}\geq 1 & \cdots ㉠ \\ \dfrac{x-2}{3}\leq 3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다. ㉠을 풀면

$$x-2\geq 3 \quad \Rightarrow \quad x\geq 5$$

이고 ㉡을 풀면

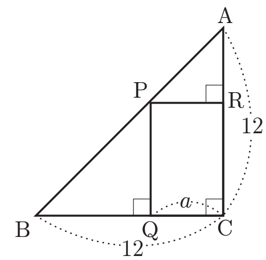
$$x-2\leq 9 \quad \Rightarrow \quad x\leq 11$$

이므로 공통범위는 $5\leq x\leq 11$이다. 즉, 조건을 만족시키는 정수 x의 개수는 7이다.

답 7

09-7 교육청 기출

그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{BC}=12$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 빗변 AB 위의 점 P에서 변 BC와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 직사각형 PQCR의 넓이는 두 삼각형 APR과 PBQ의 각각의 넓이보다 크다. $\overline{QC}=a$일 때, 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.



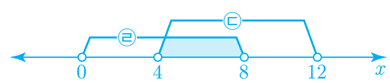
$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<12$이고 $\overline{BQ}=12-a$이다. 이때, 세 삼각형 ABC, APR, PBQ는 모두 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AR}=\overline{PR}=a, \quad \overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$$

에서 직사각형 PQCR의 넓이는 $a(12-a)$, $\triangle PBQ=\dfrac{1}{2}(12-a)^2$, $\triangle APR=\dfrac{1}{2}a^2$ 이다. 따라서 주어진 조건에 의하여 **연립부등식(p.310)**

$$\begin{cases} 2a(12-a)>(12-a)^2 & \cdots ㉠ \\ 2a(12-a)>a^2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해를 구하면 된다. 부등식 ㉠을 풀면 $4<a<12\cdots ㉢$ 이고 부등식 ㉡을 풀면 $0<a<8\cdots ㉣$이다. 따라서 연립부등식의 해는 $4<a<8$이고 이를 만족시키는 자연수 a는 5, 6, 7이므로 합은 $5+6+7=18$



답 18

09-8

다항식 $f(x)=x^2+x-1$에 대하여 부등식

$$\{f(x)\}^2+|f(x)|-2>0$$

의 해를 구하시오.

이차방정식 $f(x)=0$의 **판별식(p.166)**을 D라 할 때,

$$D=1^2+4=5>0$$

이므로 $f(x)\geq 0$인 x와 $f(x)<0$인 x가 모두 존재한다.

(i) $f(x)<0$이면

$$\{f(x)\}^2-f(x)-2=\{f(x)-2\}\{f(x)+1\}>0$$

에서 $f(x)<-1$ 또는 $f(x)>2$이다. 이때 $f(x)<0$이므로 $f(x)<-1$, 즉 $x^2+x-1<-1$이다. 따라서

$$x^2+x=x(x+1)<0$$

에서 $-1<x<0$이다.

(ii) $f(x)\geq 0$이면

$$\{f(x)\}^2+f(x)-2=\{f(x)-1\}\{f(x)+2\}>0$$

에서 $f(x)<-2$ 또는 $f(x)>1$이다. 이때 $f(x)\geq 0$이므로 $f(x)>1$, 즉 $x^2+x-1>1$이다. 따라서

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)>0$$

에서 $x<-2$ 또는 $x>1$이다.

(i), (ii)에서 주어진 **부등식의 해(p.284)**는 $x<-2$ 또는 $-1<x<0$ 또는 $x>1$이다.

답 $x<-2$ 또는 $-1<x<0$ 또는 $x>1$

수학(상) 제02회

〈Ⅱ방정식과 부등식-1〉

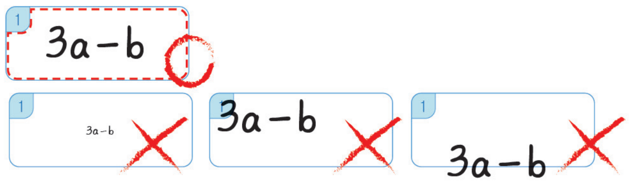
04.복소수 | 05.이차방정식 | 06.이차방정식과 이차함수

성명		수험번호	0	1	0	-					-				

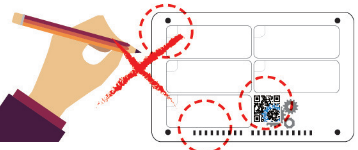
○ 답안지의 해당 번호란에 반듯한 필체로 답을 작성해주세요. 답안 인식 범위는 빨간 선 내부입니다. 선을 벗어나거나 글자가 작은 경우 인식률이 떨어집니다.

예)

잘못된 예)



○ 답안지의 모서리에 위치한 네 점과 하단의 검정박스, QR코드는 답안을 인식하는 좌표이므로 훼손하지 마세요.



○ 문항에 따라 배점이 다르니 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고해주세요.

○ 채점과 정답 및 해설 확인, 진단평가에 따른 치료문제는 마타수학 앱을 통해 확인하실 수 있습니다.

1

① 구글 플레이, 애플 앱 스토어에서 "마타수학"을 검색하거나 QR코드를 스캔하여 앱을 설치하세요.

2

② 어플을 실행시켜 메뉴바의 QR 카메라 버튼을 누르세요.

3

③ 답안의 검정색 원을 촬영범위에 맞추고 촬영버튼을 누르세요.

4

④ 필기한 답안들이 OCR기술로 자동 인식되어 나타납니다.

수학(상) 제02회 〈Ⅱ방정식과 부등식-1〉

04.복소수 | 05.이차방정식 | 06.이차방정식과 이차함수

제한시간 30분

1. x에 대한 이차방정식 $9x^2-6kx+k^2+k-12=0$이 실근을 갖지 않기 위한 자연수 k의 최솟값을 구하시오. [2점]

2. 이차함수 $y=x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. [2점]

3. 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 양수인 근을 α라 할 때, $\alpha(\alpha^2+3\alpha-4)(\alpha^2+\alpha-6)$의 값을 구하시오. [2점]

4. 두 복소수 α, β가

$$\alpha\overline{\alpha}=10, \quad \beta\overline{\beta}=10, \quad \alpha+\beta=5+2i$$

을 만족시킬 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. [3점]

5. 이차방정식 $x^2-6x-5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha}+1$과 $\dfrac{1}{\beta}+1$을 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 5인 이차방정식을 구하시오. [3점]

-제 ② 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

1	4
2	5
3	

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

수학(상) 제02회 〈Ⅱ방정식과 부등식-1〉

04.복소수 ¦ 05.이차방정식 ¦ 06.이차방정식과 이차함수

/30점

6. $0 \le x \le 2$에서 이차함수 $y=-ax^2+5ax-b$의 최댓값이 1이고 최솟값이 -5일 때, 양수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

7. $\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots-\frac{1}{i^{50}}$을 간단히 하시오. [3점]

8. 방정식 $|x^2-4x|=1$의 근을 α, β, γ, δ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}$의 값을 구하시오. [4점]

9. 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$가 성립할 때, $\sqrt{(a-1)^2(b-1)^2}-|a+b|-|ab|$를 간단히 하시오. [4점]

10. $\overline{\mathrm{AB}}=10\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{BC}}=16\,\mathrm{cm}$인 직사각형 ABCD 안에 점 P가 있다. 점 P에서 두 변 AB, AD에 이르는 길이의 합이 10 cm일 때, 꼭짓점 C에서 점 P까지의 길이의 최솟값을 구하시오. [4점]

-제 ② 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

6	9
7	10
8	

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

수학(상) 제03회

〈Ⅱ방정식과 부등식-2〉

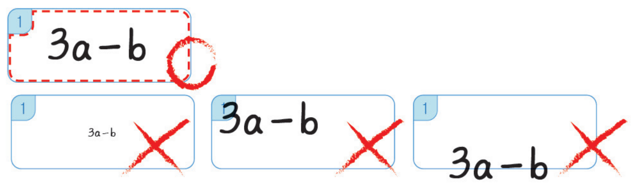
07.고차방정식 | 08.연립방정식 | 09.여러 가지 부등식

성명		수험번호	0	1	0	-					-				

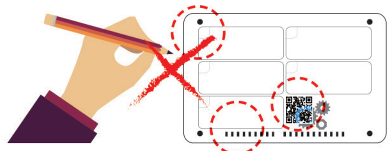
○ 답안지의 해당 번호란에 반듯한 필체로 답을 작성해주세요. 답안 인식 범위는 빨간 선 내부입니다. 선을 벗어나거나 글자가 작은 경우 인식률이 떨어집니다.

예)

잘못된 예)



○ 답안지의 모서리에 위치한 네 점과 하단의 검정박스, QR코드는 답안을 인식하는 좌표이므로 훼손하지 마세요.



○ 문항에 따라 배점이 다르니 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고해주세요.

○ 채점과 정답 및 해설 확인, 진단평가에 따른 치료문제는 마타수학 앱을 통해 확인하실 수 있습니다.

1

① 구글 플레이, 애플 앱 스토어에서 "마타수학"을 검색하거나 QR코드를 스캔하여 앱을 설치하세요.

2

② 어플을 실행시켜 메뉴바의 QR 카메라 버튼을 누르세요.

3

③ 답안의 검정색 원을 촬영범위에 맞추고 촬영버튼을 누르세요.

4

④ 필기한 답안들이 OCR기술로 자동 인식되어 나타납니다.

수학(상) 제03회 〈Ⅱ방정식과 부등식-2〉

07.고차방정식 | 08.연립방정식 | 09.여러 가지 부등식

제한시간 30분

1. 삼차방정식 $2x^3-3x^2-4=0$의 한 허근을 α라 할 때, $4\alpha^2+2\alpha+8$의 값을 구하시오. [2점]

2. x에 대한 이차부등식 $x^2-2mx+(m-8)^2\geq0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [2점]

3. 삼차방정식 $x^3-8x^2+19x-12=0$의 두 근이 x에 대한 이차방정식 $x^2+kx+4=0$의 근일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [2점]

4. 방정식 $(x^2-3x+4)(x^2-3x+2)-3=0$의 모든 실근의 곱을 구하시오. [3점]

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2+y^2-10=0 \end{cases}$ 을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 최솟값을 구하시오. [3점]

-제 ③ 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

1	4
2	5
3	

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

수학(상) 제03회 〈Ⅱ방정식과 부등식-2〉

07.고차방정식 | 08.연립방정식 | 09.여러 가지 부등식

/30점

6. x에 대한 삼차방정식

$$x^3-(k+6)x^2+(5k+6)x+k^2-6k=0$$

이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

7. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a+6 \\ xy=3a+13 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍만 존재하도록 하는 실수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

8. x에 대한 사차방정식 $x^4-kx^2+2k-4=0$이 절댓값이 2보다 크지 않은 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

9. 부등식 $\left||2x|-|x+3|\right|\le 5$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오. [4점]

10. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ (x-a)(x-b)\le 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2 이하가 되도록 하는 10 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. (단, $a<b$이다.) [4점]

-제 ③ 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

6	9
7	10
8	

VITRUV

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

빠른 정답

04 복소수

유 제 p.131

01-1 $a=3,\ b=2$

2 3

3 4

02-1 $\frac{38}{5}-\frac{9}{5}i$

2 5

3 -13

03-1 (1) $-\frac{8}{5}i$ (2) 22

2 $-\frac{1}{2}$

3 2

04-1 (1) $-45+4i$ (2) $15-5i$

2 3

3 (1) ㉢ (2) ㉡

05-1 $-a-2b+2c-d$

2 5

3 $-2i$

06-1 10

2 -10

3 $\frac{5}{2}$

07-1 (1) 0 (2) 1

2 $50-50i$

3 1

연습은 실전처럼 p.148

04-1 3

2 3

3 (1) $a=1,\ b=5$ (2) $a=2,\ b=1$

4 (1) 14 (2) $19-10i$

(3) $-14+7\sqrt{5}i$ (4) $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

5 $2+3i$

6 $-\frac{8}{3}$

7 $-\frac{9}{4}$

8 (1) $-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ (2) $-\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{5}i$

9 $5\sqrt{2}-14$

10 i

11 (1) $-64-64i$ (2) -1024

12 $x=-10,\ y=-10$

실전은 연습처럼 p.150

04-1 $\frac{5}{7}$

2 $\pm 4i$

3 6

4 $n=6,\ z=8$

5 $\frac{1}{64}$

6 1

7 -3

8 96

05 이차방정식

유 제 p.159

01-1 -2 또는 2

2 6

3 -1

02-1 (1) $x=-2$ (2) $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

2 (1) $x=-2\pm 2i$ (2) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3 10

03-1 $x=2\sqrt{3}$

2 -6

3 $x=1\pm\sqrt{2}i$

04-1 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2 11

3 $-\frac{1+\sqrt{41}}{2}$

05-1 ㄱ, ㄴ, ㅁ

2 -3

3 4

06-1 (1) 7 (2) $\sqrt{5}$ (3) -18

2 $\frac{3}{2}$

3 4

07-1 9

2 2

3 7

08-1 $x^2+10x+27=0$

2 41

3 $8x^2+7x+8=0$

09-1 (1) $(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$

(2) $\frac{1}{3}(3x-2+\sqrt{2}i)(3x-2-\sqrt{2}i)$

2 $\frac{1}{2}(2x+1-i)(2x+1+i)$

3 $2\sqrt{3}$

10-1 5

2 $x^2+7x+12=0$

3 3

연습은 실전처럼 p.184

05-1 (1) $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=-6$ (2) $x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}i$

(3) $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{35}}{4}$ (4) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}$

2 3

3 -4

4 $x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$

5 -3

6 6

7 4

8 -8

9 1

10 $x^2-52x+1=0$

11 $-\frac{3}{2}$

12 44

실전은 연습처럼 p.186

05-1 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-3$

2 9

3 $x=\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

4 $\frac{7}{4}$

5 정삼각형

6 $\frac{93}{2}$

7 -5

8 -7

06 이차방정식과 이차함수

유 제 p.197

01-1 (1) 꼭짓점: $(1,\ -4)$, x절편: -1 또는 3

(2) 꼭짓점: $\left(\frac{3}{2},\ \frac{25}{4}\right)$, x절편: -1 또는 4

2 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

3 (1) $y=-2x^2-4x$

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

02-1 $a=-1,\ b=2$

2 $a=36,\ b=25$

3 -5

03-1 $k>-\frac{5}{2}$

2 -7

3 $a\le\frac{13}{2}$

04-1 -5

2 4

3 6

05-1 -2

2 6

3 12

06-1 입장권: 8만 원, 이익금: 1350만 원

2 13

3 34

연습은 실전처럼 p.212

06-1 (1) $y=-2(x-2)^2-1$

(2) $y=(x-1)^2-1$

2 $m>1$

3 $a=-1,\ b=-2,\ c=3$

4 0

5 1 또는 3

6 5

7 -10

8 5

9 -2

10 5

11 -15

12 50

실전은 연습처럼 p.214

06-1 16

2 2

3 72

4 -1

5 10

6 5

7 4 또는 $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$

8 750

07 고차방정식

유 제 p.223

01-1 (1) $x=\frac{3}{2}$(삼중근) (2) $x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{8}$

(3) $x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(4) $x=-2$ 또는 $x=\pm1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

2 -12

3 1

02-1 (1) $x=-1$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}i$

(2) $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

2 $x=-1$ 또는 $x=\pm2$ 또는 $x=3$

3 -4

03-1 (1) $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

(2) $x=1$(중근) 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

2 -4

3 -1

04-1 1

2 10

3 $k>-\frac{3}{4}$

05-1 (1) $\frac{53}{2}$ (2) -2 (3) 25

2 17

3 -2

06-1 12

2 $x^3+4x-2=0$

3 $2x^3-4x^2+2x-2=0$

07-1 -14

2 $a=-2, b=100$

3 -1

08-1 (1) 1 (2) $\frac{5}{7}$

2 0

3 1

연습은 실전처럼 p.242

07-1 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$

(2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$

2 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

3 $a>\frac{9}{8}$

4 -3

5 $x=1$ 또는 $x=2$

6 $\frac{7}{4}$

7 3

8 34

9 -14

10 $x^3+6x^2-3x+1=0$

11 -8

12 $-\frac{4}{7}$

실전은 연습처럼 p.244

07-1 12

2 ㄱ, ㄷ

3 1

4 -3

5 -15

6 $\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$

7 -4

8 14

08 연립방정식

유 제 p.253

01-1 (1) $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ -3)$

2 $(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 4)$

3 $a=1$일 때, 해가 무수히 많다.

$a=-1$일 때, 해가 없다.

$a\neq\pm1$일 때, $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{a+1},\ \dfrac{1}{a+1}\right)$

02-1 (1) $(x,\ y)=(-2,\ 1),\ (-3,\ -1)$ (2) $(x,\ y)=(2,\ 2)$

2 (1) $(x,\ y)=(3,\ -3),\ (-3,\ 3),\ (\sqrt{3},\ \sqrt{3}),\ (-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

(2) $(x,\ y)=(3,\ 1),\ (-3,\ -1)$

3 8

03-1 (1) $(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right),\ (-4,\ 3)$

(2) $(x,\ y)=(-1,\ -2),\ (2,\ 1)$

2 (1) $(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (-2,\ -1)$

(2) $(x,\ y)=(4,\ -1),\ (-4,\ 1)$

3 $\dfrac{13}{2}$

04-1 (1) $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(2) $(x,\ y)=(3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (-3,\ -5),\ (-5,\ -3)$

2 $(x,\ y)=(-2,\ 1),\ (1,\ -2),\ (1,\ 1)$

3 $(x,\ y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

05-1 $k=\pm5$

2 $k<2$

3 3

06-1 $(x,\ y)=(4,\ 12),\ (6,\ 6),\ (12,\ 4)$

2 $x=3,\ y=3$

3 $x=-1,\ y=7$

07-1 $x=-3$

2 2

3 -2

연습은 실전처럼 p.274

08-1 (1) $(x,\ y)=(3,\ 4)$ (2) 해가 무수히 많다.

2 해가 없다.

3 -2

4 31

5 10

6 $a>\dfrac{3}{2}$

7 3

8 $(x,\ y)=(-2,\ 4),\ (3,\ 9)$

9 $m=1$ 또는 $m=3$

10 $(x,\ y)=\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}\right),\ (6,\ 4)$

11 -3

12 -4

실전은 연습처럼 p.276

08-1 $k\geq-4$

2 12

3 3

4 $(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0)$

5 $\dfrac{10}{3}$

6 7

7 6

8 $-\dfrac{2}{3}$

09 여러 가지 부등식

유 제 p.287

01-1 $x<-1$

2 $a>2$일 때, $x>a$

$a<2$일 때, $x<a$

$a=2$일 때, 해는 없다.

3 1

02-1 (1) 해는 없다. (2) $x>4$

2 7

3 $-3<x<-1$

03-1 $a=-7$, $b=7$

2 16

3 $a\geq 13$

04-1 (1) $-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{2}$ (2) $x\leq 5$

2 $a=3$, $b=7$

3 3

05-1 (1) $x<-8$ 또는 $\frac{2}{3}<x$ (2) $-\frac{5}{2}\leq x\leq -1$

2 9

3 17

06-1 (1) $x\neq 2$인 모든 실수 (2) 모든 실수

(3) 해는 없다. (4) $x=2$

2 $-2<x<1$

3 3

07-1 (1) $x<-3$ 또는 $x>1$

(2) $x\neq -\frac{1}{2}$인 모든 실수

(3) 모든 실수

2 4

3 $-4<x<4$

08-1 $-1\leq a<2$

2 $-11\leq a\leq 1$

3 2

09-1 $-1<x<4$

2 $a=9$, $b=8$

3 $x>\frac{3}{2}$

10-1 (1) 해는 없다. (2) $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

2 4

3 $1\leq x<5$

11-1 $a=-7$, $b=6$

2 $-\frac{1}{2}\leq k<3$

3 4

12-1 $k>4$

2 $a>3$

3 $-2<k<4$

13-1 (1) $k\geq 1$ (2) $k<-\frac{19}{6}$

2 5

3 $a<-3$

연습은 실전처럼 p.322

09-1 (1) $1\leq x<2$

(2) $x<-13$ 또는 $x>3$

2 ㄱ, ㄴ

3 14

4 $x<-8$

5 (1) $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수

(2) $x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$

6 $-\frac{2}{3}$

7 2개

8 3

9 (1) $-7<x<1$

(2) $2<x<5$

10 $-6\leq a<-5$ 또는 $5<a\leq 6$

11 $x\geq -2$

12 $k\leq\frac{9}{4}$

실전은 연습처럼 p.324

09-1 3

2 $1<a<5$

3 -8

4 54

5 5

6 7

7 18

8 $x<-2$ 또는 $-1<x<0$ 또는 $x>1$